Algunos genios de la Geometría.

Capítulo 1
Algunos métodos de demostración

Contenido breve

Módulo 1
Historia de la geometría

Módulo 2
La demostración

Módulo 3
Leyes

Módulo 4
Métodos de demostración

Módulo 5
Condicionales

Módulo 6
La refutación

Autoevaluación
Capítulo 1, módulos 1 al 6

Presentación

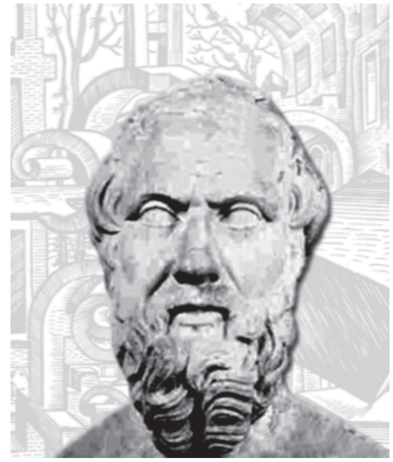
Cualquier ciencia, por abstracta que sea (en especial la matemática), tiene sus comienzos en la experimentación, y la geometría, que está basada en la medición y la observación, no escapa a este principio. Esta es la razón por la cual empiezo con un enfoque histórico y paso luego a la geometría moderna, cuyo desarrollo se debe a métodos y conceptos desarrollados en Europa entre los siglos XVI y XIX y que son una continuación de los teoremas clásicos de Euclides, mucho más refinados y sofisticados.

Bajo el supuesto de que el lector tiene pocos conocimientos de geometría, o ninguno, planteo las propiedades de los números reales y las leyes de inferencia lógica que permitieron mostrar luego algunos métodos de demostración que servirán para el posterior desarrollo del curso.

Los módulos que comprenden este capítulo analizan temas que están correlacionados entre sí: la geometría en sus inicios (clásico) con la geometría moderna, las leyes de los números reales y las leyes lógicas –los métodos de demostración basados en un método deductivo–, las condiciones necesaria y suficiente, y termina el módulo 6 con las variantes del condicional.

Módulo 1

Historia de la geometría



Heródoto

(c. 484-425 a.C.). Historiador griego, nacido en Halicarnaso (actual Bodrum, en Turquía)

Contenidos del módulo

1.1 Breve reseña histórica de la geometría
1.2 La geometría moderna

Objetivos del módulo

1. Describir la diferencia entre la geometría experimental y la deductiva.
2. Bosquejar el desarrollo de la geometría en el tiempo.
3. Enumerar los términos primitivos.
4. Mostrar los contenidos de los libros de Euclides.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es la geometría? ¿Qué significa?
2. ¿Qué es la geometría experimental?
3. ¿Qué es la geometría deductiva?
4. ¿Qué son el método inductivo y el deductivo?
5. ¿Qué son los *Elementos* de Euclides?
6. ¿Quiénes han intervenido en el desarrollo de la geometría?
7. ¿Qué y cuáles son los términos primitivos?

Introducción

Con este módulo se da inicio al estudio de la *Geometría Euclidiana*. Se comienza con los orígenes de ella, basada en la observación y en la forma como evoluciona, y se llega a una geometría deductiva. Se dan los nombres de los principales sabios matemáticos que a través del tiempo han aportado sus conocimientos al desarrollo de la geometría y se muestran los principios del enfoque moderno de la misma.

Vea el módulo 1 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

1.1 Breve reseña histórica de la geometría

Desde los comienzos del mundo el ser humano ha tenido la necesidad de contar, medir y evaluar y para ello ha escogido unidades correspondientes, pero es imposible determinar con exactitud la fecha en que se dio origen a las ideas de partida y más aún cuándo se presentaron por primera vez las propiedades relacionadas con la figuras geométricas. Sin embargo, se cree que la geometría es una de las actividades más antiguas conocidas desde el punto de vista intelectual y que fueron los babilonios, alrededor del año 2000 a.C., y los egipcios, aproximadamente en 1300 a.C., quienes desarrollaron la forma primitiva de la geometría basados en mediciones y observaciones (método inductivo); las pirámides son una muestra de los conocimientos que ellos tenían de esta ciencia.

La palabra geometría se deriva de las palabras griegas «geo», que significa «tierra», y «metrón», que significa «medir». Durante siglos el conocimiento de la geometría creció de tal manera que se descubrió que muchas afirmaciones se podían inferir de otras en forma deductiva y fue precisamente en Grecia donde se cultivó con más dedicación por parte de los sabios, quienes llegaron a la conclusión de que la mayoría de las afirmaciones geométricas se deducían de unas pocas proposiciones básicas (método deductivo).

Alrededor del año 300 a.C., Euclides de Alejandría recopiló en sus famosos *Elementos de la geometría* los conocimientos geométricos que existían hasta entonces. Los *Elementos* constan de trece libros (capítulos hoy en día) con 465 proposiciones, que comprenden la geometría plana, la geometría del espacio, la teoría de números y el álgebra geométrica griega. Los cinco primeros libros tratan de figuras planas, los cuatro siguientes son llamados aritméticas (teoría de números) y los tres restantes son dedicados a la geometría del espacio. También dejó Euclides un libro titulado *Datos* y escribió además sobre las secciones cónicas.

Entre los sabios y matemáticos más eminentes que han contribuido al desarrollo de esta ciencia en general podemos citar a Tales de Mileto (c. 624-c. 548 a.C.), Pitágoras (c. 572-c.497 a.C.) y Platón (c. 427-c. 347 a.C.). Posterior a Euclides podemos considerar a Arquímedes (287-212 a.C.) y Apolonio de Perga (¿262-180? a.C.), con quien termina la edad de oro de la geometría griega, pues los geómetras posteriores hicieron poco más que llenar los detalles y en algunas ocasiones desarrollar en forma independiente algunas teorías cuyos gérmenes estaban contenidos en los trabajos de los predecesores. Entre ellos podemos mencionar a Herón de Alejandría (20-62 d.C.), Menelao de Alejandría (100 a.C.), Pappus de Alejandría (ss. III-IV), Kepler (1571-1630), Newton (1642-1727) y otros grandes matemáticos.

1.2 La geometría moderna

El tratamiento moderno de la geometría se debe al matemático alemán David Hilbert (1862-1943), quien desarrolló en su obra *Fundamentos de la geometría* (1899) un conjunto de postulados (21) para la geometría euclidiana que no se separan mucho de los principios de Euclides.

En los tratados modernos de los postulados de la geometría euclidiana no hay descripciones de objetos como en los *Elementos* de Euclides, sino unas premisas que son el punto de partida para el desarrollo de resultados posteriores. Se supone que existen sólo tres grupos de objetos primitivos llamados «puntos», «rectas» y «planos», con respecto a los cuales se verifican ciertas condiciones (postulados).

Las proposiciones que se concluyan de los postulados, por medio de las reglas lógicas, son formalmente válidas si se han cumplido las siguientes condiciones:

1. Que se hayan enunciado explícitamente los términos primitivos con los cuales se definen los otros.

2. Que se hayan enunciado unas proposiciones iniciales con las cuales se pretende demostrar todas las demás. Dichas proposiciones son los postulados. Éstos deben cumplir las siguientes condiciones:

   - Consistencia: no pueden ser contradictorios entre sí.
   - Independencia: ningún postulado debe deducirse de los demás.
   - Suficiencia: los resultados requeridos en la teoría deben ser una consecuecia de ellos o contradecirlos.

3. Que las relaciones establecidas entre los términos sean relaciones lógicas independientes del sentido que pueda darse a los términos.

4. Que en las demostraciones no se suponga nada de las figuras, es decir, que sólo intervengan las relaciones lógicas.

Debido a que hasta el momento no se tienen conocimientos de geometría para desarrollar demostraciones formales, se hará una lista de las leyes o propiedades de los números reales y las reglas de inferencia lógica para mostrar algunos métodos de demostración (módulo 3).

Heródoto

A Heródoto se le conoce como el padre de la historiografía. Su gran obra, conocida como *Historias*, ha sido dividida en nueve libros. En los primeros se relatan costumbres, leyendas, historia y tradiciones de diversos pueblos del mundo antiguo (lidios, escitas, medas, persas, asirios y egipcios), y los tres últimos tratan los conflictos armados entre Grecia y Persia (que tuvieron lugar a principios del siglo V a.C.), conocidos como las Guerras Médicas. Heródoto creía que el Universo estaba regido por el destino y el azar, pero le daba gran importancia al sentido moral con que las personas actuaban. Para él, la arrogancia era castigada por los dioses. Este intento de extraer lecciones morales del estudio de los grandes acontecimientos, es la base de la historiografía griega y romana.

Módulo 2

La demostración

Contenidos del módulo

2.1 La demostración

Objetivos del módulo

1. Describir las partes de una demostración.
2. Diferenciar las etapas de una demostración.
3. Relacionar los fundamentos de la demostración.
4. Construir una demostración.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es una demostración?
2. ¿Cómo está constituida una demostración?
3. ¿Qué orden debe tener una demostración?
4. ¿En qué momento termina una demostración?

Introducción

Los términos primitivos o no definidos constituyen la herramienta básica para las definiciones y los postulados que serán los fundamentos en el proceso demostrativo, junto a otros conocimientos que se pueden aportar. En este módulo no se profundiza en la demostración porque aún no se han estudiado muchos conceptos geométricos ni se dispone de las propiedades de los números reales.

Michel Chasles

(1793-1880). Matemático francés nacido en Epernon y muerto en París.

Vea el módulo 2 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

2.1 La demostración

Sin pretender dar una definición muy rigurosa podemos considerar la demostración de una proposición *p* como una cadena finita de transformaciones que se realizan mediante reglas lógicas y que se forman a partir de proposiciones verdaderas o supuestamente verdaderas y las cuales nos conducen a la proposición *p*.

Una proposición o relación resultante de otras mediante el proceso de la demostración se llama *deducida* o *demostrada*.

Cuando se han establecido los términos primitivos, los términos definidos y un sistema de postulados, podemos continuar definiendo nuevos términos y formulando proposiciones nuevas que no entran o conducen a contradicciones y cuya verdad o falsedad debe probarse. Tales proposiciones se llaman *teoremas*.

Definición 2.1: Teorema

Un teorema es toda proposición cuya validez se puede demostrar utilizando otros elementos conocidos, mediante operaciones lógicas perfectamente coordinadas. No siempre tenemos evidencia directa de la validez de un teorema. Eso depende en parte de su grado de complejidad y de nuestra mayor o menor familiaridad con su contenido.

Un teorema requiere demostración cuando no hay evidencia de su validez.

La demostración consta de tres partes (figura 2.1):

a. El conocimiento o proposición que se trata de demostrar. En esta parte es importante diferenciar muy claramente la información que nos dan (la hipótesis) de lo que nos solicitan que demostremos (la tesis).
b. Los fundamentos empleados como base de la demostración. Estos fundamentos están constituidos por los términos primitivos, las definiciones, los postulados y las proposiciones o teoremas ya demostrados.
c. El procedimiento usado para lograr que el conocimiento quede demostrado (elegir el método adecuado). Este método puede ser el deductivo o el inductivo.

El método deductivo consiste en partir de un número reducido de información (hipótesis-fundamentos) y mediante un proceso lógico deducir otros conocimientos o proposiciones nuevos.

El esquema sería:

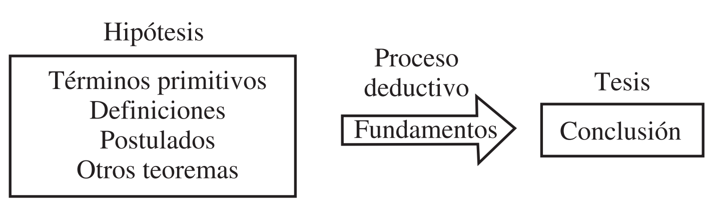


Figura 2.1. Método deductivo

El método inductivo es generalmente usado en las ciencias físicas, naturales y sociales porque a partir de una serie finita de casos se llega a la afirmación de la verdad de una proposición.

Generalmente, la estructura de una demostración se expresa por medio de una implicación de la forma $H \Rightarrow T$, donde:

a. Se acepta que H (la hipótesis) es verdadera y está constituida por los términos primitivos, las definiciones, los postulados y las proposiciones (teoremas) cuya validez ha sido probada.
b. Se establece una sucesión finita de afirmaciones que son combinaciones y conexiones de los elementos de la hipótesis H y los fundamentos que van a determinar que H implica a T.
c. Se afirma que T (tesis o conclusión) es verdadera (está basada en el principio filosófico: «De la verdad no se puede seguir la falsedad»).

Nota: el problema de la construcción de una demostración consiste en preparar una serie de pasos que conduzcan a la conclusión deseada. No hay procedimientos establecidos para hacerlo y por ello la demostración constituye un proceso creador dentro de un conocimiento científico que se adquiere con la práctica y el desarrollo de la iniciativa de cada uno.

En geometría una ayuda importante en la demostración es una figura que muestra una clase particular de toda una clase de figuras geométricas para las cuales tiene validez el teorema que se va a demostrar.

Michel Chasles

Los trabajos de Chasles versaron sobre temas de geometría proyectiva y descriptiva, en especial sobre las cónicas. Descubrió independientemente alguno de los resultados de Jacob Steiner.

Fue practicante del llamado método mixto: pensaba sus resultados analíticamente y los presentaba sintéticamente. Chasles introdujo el término *homografía* y definió las *correlaciones*. Uno de sus resultados más conocidos asegura que «cuatro puntos fijos de una cónica determinan con un quinto punto de la misma cuatro rectas cuya razón doble no depende de ese último punto».

Gracias a Chasles, el tratado de Gérard Desargues sobre la perspectiva fue reconocido como uno de los clásicos en el desarrollo primitivo de la geometría proyectiva. Este trabajo, que fuera despreciado en su momento por la mayoría de los matemáticos, fue desarrollado por Michel Chasles mientras escribía su obra *Historia de la geometría*.

Módulo 3

Leyes

Contenidos del módulo

3.1 Propiedades de los números reales
3.2 Leyes de la lógica proposicional

Objetivos del módulo

1. Diferenciar las propiedades de los números reales.
2. Clasificar las relaciones equivalentes.
3. Formular las reglas de inferencia.
4. Utilizar las reglas de inferencia.

Preguntas básicas

1. ¿Qué vamos a demostrar?
2. ¿Cuáles son las propiedades de los números reales?
3. ¿Para qué o en qué los vamos a utilizar?
4. ¿Qué son las leyes lógicas?
5. ¿Cuáles son las leyes lógicas?
6. ¿Qué son las relaciones equivalentes? ¿Cuáles son?
7. ¿En qué se aplican las leyes o relaciones equivalentes?

Introducción

Como aún no se tienen conocimientos geométricos, pero sí sobre los números y sobre el álgebra, entonces se presenta en este módulo un listado de las propiedades básicas de los números reales para aplicarlas posteriormente en las demostraciones. Se hace además una breve presentación de las leyes y reglas de inferencia lógica para posteriores aplicaciones.

Lazare Nicolas Carnot

(1753-1823). Ingeniero y general del ejército francés, nacido en Nolay y muerto en Magdeburgo.

Vea el módulo 3 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

3.1 Propiedades de los números reales

Así el lector esté familiarizado con las propiedades del sistema de los números reales, es conveniente presentarlas en este módulo antes de comenzar los métodos de demostración.

Los métodos de demostración están aplicados a las propiedades de los números reales, porque aún no se tienen elementos de geometría para su aplicación.

Con frecuencia en el desarrollo del curso el estudiante se referirá a estas propiedades con su nombre o enunciándolas, o bien como propiedades de números reales simplemente.

Propiedades de la igualdad

1. Reflexiva: $a = a$
2. Simétrica: $a = b \to b = a$
3. Transitiva: $a = b \wedge b = c \to a = c$
4. Aditiva: $(a = b) \wedge (c = d) \to (a + c) = (b + d)$
5. De la sustracción: $(a = b) \wedge (c = d) \to (a - c) = (b - d)$
6. Multiplicativa: $(a = b) \wedge (c = d) \to ac = bd$
7. De la división: $(a = b) \wedge (c = d) \to a / c = b / d$ con $c \neq 0 \wedge d \neq 0$
8. Cancelativa: $(ac = bc \wedge c \neq 0) \to a = b$
9. Sustitutiva: una ecuación no cambia de validez si una expresión se sustituye por otra equivalente.

Definición 3.1: Relación de orden

Un número real es *positivo* si y sólo si es mayor que cero. Escribimos:

$a \in \mathbb{R}^{+} \leftrightarrow a > 0$

Un número real es *negativo* si y sólo si es menor que cero. Escribimos:

$a \in \mathbb{R}^{-} \leftrightarrow a < 0$

$>$: Mayor que $<$: Menor que $\geq$: Mayor o igual que $\leq$: Menor o igual que

Se debe tener presente que $a > b$ y $b < a$ son equivalentes, es decir, son formas diferentes de expresar lo mismo.

1. Ley o propiedad de tricotomía: para todo par de números reales, a y b, una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera: $a < b$, $a = b$, $a > b$.

2. Adición: $(a > b) \wedge (c > d) \to (a + c) > (b + d)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

3. Sustracción: $a < b \to a - c < b - c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$

4. Multiplicación: $\left.\begin{array}{l} a > b \wedge c > 0 \to ac > bc \\ a > b \wedge c < 0 \to ac < bc \end{array}\right\}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$

5. División: $\left.\begin{array}{l} a > b \wedge c > 0 \rightarrow a/c > b/c \\ a > b \wedge c < 0 \rightarrow a/c < b/c \end{array}\right\}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$

6. Transitiva: $a > b \wedge b > c \rightarrow a > c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$

7. Invertiva: $a > b \rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, con $a \wedge b \neq 0$

Propiedades de la adición

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces se cumple:

1. Cerradura: $a + b$ es un número real
2. Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. Modulativa: $a + 0 = 0 + a = a$
4. Invertiva: $a + (-a) = (-a) + a = a - a = 0$
5. Conmutativa: $a + b = b + a$

Propiedades de la multiplicación

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces se cumple:

1. Cerradura: $a \cdot b$ es un número real
2. Asociativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
3. Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
4. Modulativa: $1 \cdot a = a$
5. Invertiva: $a \cdot (1/a) = (1/a) \cdot a = 1$, con $a \neq 0$
6. Distributiva: $a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = ab + ac$

Las propiedades de la adición y la multiplicación constituyen las «propiedades de campo de los números reales».

3.2 Leyes de la lógica proposicional

Es conveniente que el lector tenga presente la estructura y composición de las proposiciones lógicas, los conectivos, las tablas de verdad y las tautologías.

Como las tautologías son esquemas válidos de inferencia, constituyen entonces el punto de partida para las leyes lógicas que son universalmente verdaderas.

A continuación enumeramos algunas leyes lógicas que con regularidad estamos aplicando en las ciencias.

1. Ley de identidad: $p \Leftrightarrow p$
2. Ley de contradicción: $(p \wedge \sim p)$
3. Ley del tercero excluido: $p \vee \sim p$
4. Ley de doble negación: $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$
5. Leyes de simplificación: $(p \wedge q) \Rightarrow p$; $(p \wedge q) \Rightarrow q$

   que se suelen expresar: $\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline p \end{array}$ o $\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline q \end{array}$

6. Ley de adición (LA): $p \Rightarrow (p \vee q)$; $q \Rightarrow (p \vee q)$

Lazare Nicolas Carnot

Lazare Nicolas Carnot es el padre de Nicolas Léonard Sadi Carnot, físico que describió el ciclo térmico que lleva su nombre y a partir del cual se descubrió el segundo principio de la termodinámica. En su libro *Reflexiones sobre la metafísica del cálculo infinitesimal*, Lazare Carnot intentó demostrar que los métodos de Newton y Leibniz son algoritmos equivalentes al método de exhaución de Arquímedes. Una de las conclusiones posteriores a este trabajo fue que los verdaderos principios metafísicos son los principios de compensación de errores. Según su razonamiento, los infinitesimales son cantidades despreciables que son introducidas, al igual que los números imaginarios, para facilitar los cálculos, y son eliminadas para alcanzar el resultado final. Asimismo, las ecuaciones imperfectas se vuelven perfectamente exactas en el cálculo mediante la eliminación de cantidades tales como los infinitésimos de orden superior, que son una fuente de errores. Otra de sus más importantes obras es *Géométrie de la position*.

7. Leyes conmutativas:

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$
$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$$
$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$$

8. Leyes asociativas:

$$\left[(p \wedge q) \wedge r\right] \Leftrightarrow \left[p \wedge (q \wedge r)\right]$$
$$\left[(p \vee q) \vee r\right] \Leftrightarrow \left[p \vee (q \vee r)\right]$$
$$\left[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r\right] \Leftrightarrow \left[p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)\right]$$

9. Leyes distributivas:

$$\left[p \wedge (q \vee r)\right] \Leftrightarrow \left[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)\right]$$
$$\left[p \vee (q \wedge r)\right] \Leftrightarrow \left[(p \vee q) \wedge (p \vee r)\right]$$
$$\left[p \rightarrow (q \wedge r)\right] \Leftrightarrow \left[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)\right]$$
$$\left[p \rightarrow (q \vee r)\right] \Leftrightarrow \left[(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)\right]$$

10. Ley transitiva o silogismo hipotético: $\left[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)\right] \Leftrightarrow p \rightarrow r$
que también se suele expresar:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline p \rightarrow r \end{array}$$

11. Ley de transposición: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

12. Ley del bicondicional: $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \left[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)\right]$

13. Ley del condicional-disyunción: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

14. Leyes de De Morgan:

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$
$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

15. Ley modus ponendo-ponens (PP)

$$\left[(p \rightarrow q) \wedge p\right] \Leftrightarrow q \quad \text{o} \quad \begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

16. Ley modus tollendo-tollens (TT)

$$\left[(p \rightarrow q) \wedge \sim q\right] \Leftrightarrow \sim p \quad \text{o} \quad \begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

17. Ley modus tollendo-ponens (TP)

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q \quad \text{o} \quad \begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim p} \\ q \end{array}$$

$$[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p \quad \text{o} \quad \begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim q} \\ p \end{array}$$

18. Ley del silogismo disyuntivo:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ \underline{q \rightarrow s} \\ r \vee s \end{array}$$

Un caso particular del silogismo disyuntivo es:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ \underline{q \rightarrow r} \\ r \end{array}$$

Existen tres reglas básicas de validez que se aplican continuamente.

Regla 1: las definiciones, los postulados y los teoremas demostrados pueden aparecer en cualquier paso de la demostración.

Regla 2: proposiciones equivalentes se pueden sustituir entre sí en cualquier parte de una demostración.

Regla 3: una proposición se puede introducir en cualquier punto de la demostración.

Módulo 4

Métodos de demostración

Jacob Steiner

(1796-1863). Matemático suizo nacido en Utzenstorf y muerto en Berna.

Contenidos del módulo

4.1 Demostración directa
4.2 Esquema de la demostración directa
4.3 Demostración indirecta

Objetivos del módulo

1. Analizar el enunciado que se va a demostrar.
2. Relacionar los fundamentos en la demostración.
3. Diferenciar la demostración directa de la demostración indirecta.
4. Utilizar los conocimientos en la demostración para justificar los pasos dados.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es la demostración directa?
2. ¿Cómo establecer los fundamentos para la demostración?
3. ¿Cómo relacionar los fundamentos?
4. ¿Cuál es la diferencia entre la demostración directa y la indirecta?
5. ¿Cuándo hacer una demostración indirecta?

Introducción

En la mayoría de los casos, los alumnos tienen mucho temor de enfrentar una demostración de alguna proposición. La pregunta que más se escucha es: ¿cómo empiezo? Se espera que la orientación dada en la presente sección contribuya a darle confianza al alumno en este arte.

Vea el módulo 4 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

4.1 Demostración directa

Los procedimientos de demostración establecen la conexión lógica entre los fundamentos y sus consecuencias sucesivas, hasta llegar a la tesis o conclusión final. Las diferentes formas de ordenar los elementos de la demostración (fundamentos, consecuencias directas, conclusión final) establecen diferentes tipos de procedimientos demostrativos, a saber: *demostración directa* y *demostración indirecta*.

La demostración directa del teorema $H \Rightarrow T$ es el procedimiento que nos prueba la verdad de *T* mediante una serie finita de inferencias de los elementos de *H*.

4.2 Esquema de la demostración directa

Este procedimiento nos lleva al descubrimiento de la veracidad de la tesis mediante el examen de las condiciones, los términos primitivos, las definiciones, los postulados y las proposiciones ya probadas que en conjunto conforman la hipótesis *H*, constituyéndose así en un razonamiento deductivo que nos conduce a la conclusión de la tesis *T*. Si de un conjunto finito de proposiciones $p_1, p_{2.}.....p_n$ que constituyen la hipótesis *H* se siguen como consecuencias lógicas las proposiciones $t_1, t_{2.}.....t_n$ y de éstas se concluye la tesis *T*, entonces decimos que el teorema $H \Rightarrow T$ se ha demostrado o deducido directamente. Debemos tener presente el esquema general de la demostración ilustrado en la figura 2.1.

Otra forma de esquematizar la demostración directa sería:

$$(1)\ \begin{Bmatrix} P_1 \ldots H \\ P_2 \ldots H \\ P_k \ldots H \end{Bmatrix} \text{premisas que constituyen la hipótesis}$$

$$(2)\ \text{De } P_1, P_2 \text{ o } P_k \Rightarrow t_1 \rightarrow \begin{cases} \text{definición, postulado} \\ \text{u otro teorema} \end{cases}$$

$$(3)\ t_1 \Rightarrow t_2 \rightarrow \text{razón de (2) y así sucesivamente, hasta}$$

$$\vdots$$

$$(n)\ t_{n-1} \Rightarrow T \rightarrow \begin{cases} \text{definición, postulado} \\ \text{u otro teorema} \end{cases}$$

En forma simplificada: si a las premisas $P_1, P_2, \ldots, P_k$ que forman la hipótesis las denotamos por *P*, entonces:

(1) $P \ldots$ hipótesis

(2) $P \Rightarrow t_1 \ldots$ fundamento

(3) $t_1 \Rightarrow t_2 \ldots$ fundamento

(4) $t_2 \Rightarrow t_3 \ldots$ fundamento

$\vdots$

(n) $t_{n-1} \Rightarrow T \ldots$ fundamento

$(n+1)$. Luego $t_1 \Rightarrow T \ldots$ silogismo entre (2) y (n).

$\therefore T$ es verdadera ... PP y se ha demostrado que $H \Rightarrow T$.

O más aún: $P \Rightarrow t_1 \Rightarrow t_2 \Rightarrow ... \Rightarrow t_n \Rightarrow T$.

$\therefore P \Rightarrow T \wedge T$ es verdadera.

En resumen, en una demostración directa cada paso debe ir acompañado de una explicación que justifique su presencia.

Ejemplo 4.2.1

Si a, b y c son números reales tales que $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$. En este caso los fundamentos o bases de la demostración se encuentran en la definición de desigualdad, la multiplicación en desigualdad, la propiedad distributiva y el teorema: si a y b son números reales, entonces $a < b$ si y sólo si $b - a > 0$.

Si aplicamos el teorema enunciado a la hipótesis $(a < b)$ tenemos $b - a > 0$. Como $c > 0$ (hipótesis), por la multiplicación en desigualdad obtenemos: $c\,(b - a) > 0$ y por la propiedad distributiva: $cb - ca > 0$. Si aplicamos de nuevo el teorema enunciado, entonces $ca < cb$ y la demostración ha concluido.

También podemos organizar la demostración de la siguiente forma:

1. a, b y $c \in \mathbb{R}$ (hipótesis)
2. $a < b$ (hipótesis)
3. $c > 0$ (hipótesis)
4. $b - a > 0$ (teorema enunciado aplicado a 2)
5. $c\,(b - a) > 0$ (multiplicación en desigualdad de 3 y 4)
6. $cb - ca > 0$ (propiedad distributiva en 5)
7. $ca < cb$ (teorema enunciado aplicado a 6)
8. $ac < bc$ (propiedad conmutativa)

4.3 Demostración indirecta

Si se tienen dificultades en la construcción de una demostración directa, se pueden obtener a veces resultados más simples y mejores empleando algunos otros métodos.

Cuando se establece la validez de una tesis T probando que las consecuencias de su contraria son falsas, entonces se realiza una *demostración indirecta*.

La demostración indirecta determina la veracidad de la tesis que se demuestra, no examinando ésta sino algunas otras proposiciones, las cuales se hallan concatenadas con la tesis que se demuestra, de tal manera que, comprobada la falsedad de aquéllas, se sigue necesariamente la veracidad de la tesis.

La demostración indirecta se basa en el hecho de que si $\sim T$ (negación de la tesis) es falsa, entonces T es verdadera. La mejor manera de hacerlo es mostrando que $\sim T$ no es compatible (contradice) con las afirmaciones dadas en la hipótesis H y por lo tanto $\sim T$ es falsa y T es verdadera.

Luego, para demostrar un teorema de la forma $H \Rightarrow T$, basta deducir alguna contradicción a partir de la hipótesis auxiliar $H \wedge \sim T$.

Hay cuatro formas diferentes del método indirecto de demostración.

a. $\sim T \Rightarrow \sim H$, ya que $H \Rightarrow T$ es equivalente (por leyes lógicas) a $\sim T \Rightarrow \sim H$. La

Jacob Steiner

Steiner realizó estudios sobre geometría proyectiva utilizando métodos sintéticos (independientes de las coordenadas). Propuso como problema una generalización del teorema de William Wallace: «Demostrar que el lugar de los puntos *P* del plano de un triángulo *ABC* tales que las proyecciones ortogonales *U*, *V*, *W*, de *P* sobre los lados *a*, *b*, *c* del triángulo *ABC* son vértices de un triángulo de área dada *k* es una circunferencia concéntrica con la circunscrita al triángulo *ABC*». La generalización fue demostrada rápidamente y apareció publicada en los *Anales de Gergonne*.

demostración indirecta, en este caso, se reduce a utilizar el contradirecto (módulo 6, apartado 6.2) $\sim T \Rightarrow \sim H$ del enunciado $H \Rightarrow T$

b. $(H \wedge \sim T) \Rightarrow \sim H$

c. $(H \wedge \sim T) \Rightarrow T$

d. $(H \wedge \sim T) \Rightarrow (p \wedge \sim p)$

En los casos *b*, *c*, *d* hacemos uso de la hipótesis doble $H \wedge \sim T$, constituida por la conjunción de la hipótesis *(H)* y la negación de la tesis $\sim T$.

El caso *d* de la demostracion indirecta $(H \wedge \sim T) \Rightarrow (p \wedge \sim p)$ a menudo se llama *reducción al absurdo*.

Las formas *b, c* y *d* de la demostración indirecta son muy útiles ya que, como se observa, es posible tomar a $\sim T$ (negación de la tesis) como una hipótesis además de *H* y también porque existen otras dos conclusiones además de *T*.

Ejemplo 4.3.1

Si *a, b* y *c* son números reales tales que $a + c \leq b + c$, entonces $a \leq b$. La hipótesis es $a + c \leq b + c$ y la tesis es $a \leq b$. En este caso los fundamentos de la demostración se encuentran en la adición en desigualdades y la ley de tricotomía de los reales, además de la negación de la tesis.

1. $a \nleq b$ es la negación de la tesis y constituye la hipótesis auxiliar.	
2. a, b y $c \in \mathbb{R}$	(hipótesis)
3. $a + c \leq b + c$	(hipótesis)
4. $b < a$	(ley de la tricotomía aplicada a 1)
5. $b + c < a + c$	(adición en desigualdad aplicada a 4)
6. $a + c \leq b + c$ y $b + c \leq a + c$	(contradicción entre 3 y 5)

Concluimos entonces que $a \leq b$.

Ejemplo 4.3.2

Sean *a* y *b* dos números reales, entonces $a < b$ si y sólo si $b - a > 0$. El enunciado nos indica que hay un bicondicional cuya ley (12 del módulo 3, apartado 3.2) nos dice que:

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)].$$

El enunciado debemos descomponerlo en dos condicionales:

a. $p \rightarrow q$: si $b - a > 0$, entonces $a < b$.

b. $q \rightarrow p$: si $a < b$, entonces $b - a > 0$.

Los fundamentos para la demostración están en la ley de tricotomía, la definición de desigualdad, las propiedades del inverso aditivo, el neutro aditivo, la asociatividad y la hipótesis auxiliar de la negación de la tesis.
Demostremos la parte *a*:

1. $a, b \in \mathbb{R}$	(hipótesis)

2. $b-a>0$	(hipótesis)
3. $a \not< b$	(hipótesis auxiliar (negación de la tesis))
4. $a=b \vee a>b$	(de 3; ley de tricotomía)

Analicemos estas dos situaciones:

5. $a=b$	(hipótesis auxiliar)
6. $a+(-a)=b+(-a)$	(adición en la igualdad; en 5)
7. $a-a=b-a$	(definición)
8. $0=b-a$	(inverso aditivo en 7)
9. $(b-a>0)\wedge(b-a=0)$	(de 2 y 8, es una contradicción con la ley de tricotomía)
10. $a \neq b$	(negación de 5 por ser falsa)
11. $a>b$	(hipótesis auxiliar, la otra alternativa de 4)
12. $a+(-a)>b+(-a)$	(adición aplicada en desigualdad 11)
13. $a-a>b-a$	(definición)
14. $0>b-a$	(inverso aditivo en 13)
15. $b-a<0$	(14 y 15 son equivalentes)
16. $(b-a<0)\wedge(b-a)>0$	(de 2 y 15, es una contradicción de la ley de tricotomía)
17. $a \not> b$	(negación de 11 por ser falsa)

Observamos que 4 separada en 5 y 11 produce las contradicciones 9 y 16, luego 4 es falsa (10, 17) y por tanto concluimos que $a<b$ (ley de tricotomía).

En forma similar se demuestra la parte *b*.

Otra forma de enfocar la demostración es:

$a \not< b$ (negación de la tesis), lo cual implica que $a = b$ o $a > b$, según la ley de tricotomía.

Si $a = b$ tenemos una contradicción con la hipótesis ($a < b$), luego $a \neq b$.

Si $a \not> b$ tenemos una contradicción con la hipótesis ($a < b$), luego $a \neq b$.

Como $a \neq b$ y $a \not> b$, entonces por la ley de la tricotomía la única alternativa que hay es $a < b$ y concluimos la demostración.

En la demostración anterior, ¿cuál es la fundamentación?

Módulo 5

Condicionales

Contenidos del módulo

5.1 Condición de suficiencia y condición necesaria

Objetivos del módulo

1. Diferenciar entre condición suficiente y condición necesaria.
2. Determinar si una información dada es suficiente o necesaria, o suficiente y necesaria, para inferir lo solicitado.

Preguntas básicas

1. Con la información que me dan, ¿sí puedo concluir lo solicitado?
2. ¿La información dada será suficiente?
3. ¿La información dada será necesaria?
4. ¿La información dada será suficiente y necesaria?
5. ¿La información dada será necesaria pero no suficiente?
6. ¿La información dada será suficiente pero no necesaria?
7. ¿La información dada no es ni suficiente ni necesaria?

Introducción

Para realizar y controlar un proceso se deben conocer las condiciones con las cuales dicho proceso se cumple. Las condiciones deben responder a las preguntas formuladas, teniendo presente que pueden ser suficientes, necesarias o suficientes y necesarias. Se debe tener presente que una condición suficiente no es indispensable para la realización del suceso, contrario a la condición necesaria.

Platón

(c. 427-c. 347 a.C.). Filósofo y matemático griego nacido en Atenas.

Vea el módulo 5 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

5.1 Condición de suficiencia y condición necesaria

Para la realización y el control de un proceso debemos conocer las condiciones con las cuales dicho proceso se cumple. Tales condiciones pueden ser:

a. Suficientes, sin ser necesarias
b. Necesarias pero no suficientes
c. Suficientes y necesarias

Definición 5.1.1

Una c*ondición suficiente* para la realización de un acontecimiento es una circunstancia en cuya presencia el acontecimiento debe ocurrir. Una condición suficiente no es indispensable para la realización de un acontecimiento.

Ejemplo 5.1.1

1. Ser divisible por 4 es una condición suficiente para que un número sea múltiplo de 2. Sin embargo, un número puede ser múltiplo de 2 sin ser divisible por 4.
2. Que a sea un número natural es condición suficiente para que sea número entero. Sin embargo a puede ser un número entero sin ser natural.
3. La proposición p es una condición suficiente para la proposición q, lo cual quiere decir que si p se verifica, entonces q se verifica $(p \to q)$, o también, que si q no se verifica, entonces p no pudo verificarse $(\sim q \to \sim p)$.

Definición 5.1.2

Una *condición necesaria* es aquella cuyo cumplimiento es indispensable para que se produzca un acontecimiento, es decir, la ausencia de tal condición determina la no realización del acontecimiento.

El hecho de que se cumpla una condición necesaria para la realización de un acontecimiento no indica que sea suficiente; éste puede, sin embargo, no realizarse.

Ejemplo 5.1.2

1. Sea n un entero. Entonces la condición «n es un entero negativo» es condición necesaria para que $2n$ sea un número negativo, puesto que no puede darse el caso de que $2n$ sea negativo siendo n positivo.
2. La presencia de oxígeno es una condición necesaria para la combustión de una sustancia. En efecto: sabemos que no puede producirse combustión de una sustancia en ausencia de oxígeno. Además puede existir oxígeno sin que se produzca la combustión, pues dicha condición no es suficiente.

La proposición p es una condición necesaria para q, lo cual quiere decir que q no puede verificarse si p no se verifica $(\sim p \to \sim q)$, o también, que si q se verifica, entonces p tiene que verificarse $(q \to p)$.

Definición 5.1.3

Una condición q que es a la vez suficiente y necesaria para el cumplimiento de un determinado acontecimiento, se llama *condición suficiente y necesaria*.

Ejemplo 5.1.3

1. Si n es un número entero, entonces la condición de ser a un número positivo es suficiente y necesaria para que $2a$ sea un entero positivo.
2. Elevar la temperatura a punto crítico en presencia de oxígeno es condición necesaria y suficiente para que se produzca la combustión de una sustancia.

Si p y q son dos proposiciones, entonces p es una condición suficiente y necesaria para q. Puede expresarse en la siguiente forma: $(p \to q) \wedge (q \to p)$, o también, $p \Leftrightarrow q$, que leemos p si y sólo si q.

Platón

En su pensamiento destaca la *teoría de las ideas*, que proponía que los objetos del mundo físico sólo se parecen o participan de las formas perfectas en el mundo ideal, y que sólo las formas perfectas pueden ser el objeto del verdadero conocimiento. La teoría de las ideas se puede entender mejor en términos de entidades matemáticas. Un círculo, por ejemplo, se define como una figura plana compuesta por una serie de puntos, todos equidistantes de un mismo lugar.

Para Platón, la forma de círculo existe, pero no en el mundo físico del espacio y del tiempo. Existe como un objeto inmutable en el ámbito de las ideas, que sólo puede ser conocido mediante la razón. Las ideas tienen mayor entidad que los objetos en el mundo físico tanto por su perfección y estabilidad como por el hecho de ser modelos, semejanzas que dan a los objetos físicos comunes lo que tienen de realidad. Las formas circular, cuadrada y triangular son excelentes ejemplos de lo que Platón entiende por idea. Un objeto que existe en el mundo físico puede ser llamado círculo, cuadrado o triángulo porque se parece («participa de», en palabras de Platón) a la idea de círculo, cuadrado o triángulo.

Módulo 6

La refutación

Dinostrato

(350 a.C). Matemático griego. Propuso la *cuadratura del círculo* y demostró que mediante la *trisectriz de Hipias* era posible lograrla. A esta curva se la empieza a llamar cuadratriz.

Contenidos del módulo

6.1 La refutación en la matemática
6.2 Formas condicionales

Objetivos del módulo

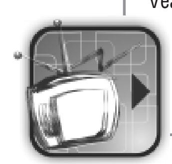
1. Emplear la refutación como una demostración de que algo no es verdadero.
2. Usar el contrarrecíproco en una demostración.
3. Inferir que hay proposiciones que no siempre se cumplen.
4. Utilizar los conocimientos en la demostración para justificar los pasos dados.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es un contraejemplo?
2. ¿Siempre hay contraejemplos?
3. ¿Sólo se puede usar la demostración directa o la indirecta?

Introducción

Continuando con la demostración de si una proposición es falsa o verdadera, encontramos que una situación particular puede hacer que el enunciado presentado sea falso. Hay además en geometría y en otras áreas del conocimiento situaciones en las cuales una demostración es más sencilla o sólo posible usando el contrarrecíproco de la proposición. ¿Cómo saberlo? Cuando se aprenda el arte de la demostración, se pueden percibir dichas situaciones.



Vea el módulo 6 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

6.1 La refutación en la matemática

La *refutación* es el razonamiento o serie de razonamientos que prueba la falsedad de una hipótesis o la inconsecuencia de su supuesta demostración.

Hay dos formas básicas para refutar una proposición:
a. Refutación por contradicción.
b. Refutación por contraejemplo o por ejemplo del contrario.

En la *refutación por contradicción* suponemos que la proposición dada es verdadera y utilizamos cualquiera de los métodos de demostración para llegar a una conclusión que contradiga una proposición cuya verdad ha sido aceptada o demostrada, con lo cual demostramos que la proposición dada es falsa.

Ejemplo 6.1.1

Refutar la afirmación: «Existe al menos un número real a tal que $a^2 < 0$ ».
Supongamos que esa proposición es verdadera y, por tanto, que «existe $a \in \mathbb{R}$, tal que $a^2 < 0$». La hipótesis será entonces: $a \in \mathbb{R}$ y $a^2 < 0$.

Por la ley de la tricotomía tenemos: $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$. Analicemos cada caso:

a. Si $a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow (-a)(-a) > 0 \Rightarrow a^2 > 0$, lo cual contradice la hipótesis $(a^2 < 0)$, de donde $a \nless 0$.

b. Si $a = 0 \Rightarrow a^2 = 0$, lo cual contradice la hipótesis y por consiguiente $a \neq 0$.

c. Si $a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$, lo cual contradice la hipótesis $(a^2 < 0)$, luego $a \ngtr 0$.

En todos los casos hemos obtenido una contradicción, y con $a \nless 0$, $a \neq 0$, $a \ngtr 0$ concluimos que «no existe un número real a tal que $a^2 < 0$».

La *refutación por contraejemplo* o *por ejemplo del contrario* es uno de los procedimientos más eficaces para refutar una afirmación y consiste en hallar un caso en el cual no se cumpla la afirmación. Lo anterior indica que la prueba de existir una sola excepción es suficiente para refutar una afirmación.

El método es recomendado cuando se trata de refutar afirmaciones de la forma:
a. Todo individuo verifica la propiedad p.
b. Ningún individuo verifica la propiedad p.

Ejemplo 6.1.2

Refutar por contraejemplo la afirmación: «Para todo $n \in \aleph$ se verifica que $n^2 + n + 41$ es un número primo».

Si sustituimos n por los números naturales 1, 2, 3 ..., 38, 39 en la expresión $n^2 + n + 41$, podemos comprobar que los resultados son números primos.

Para $n = 1, n^2 + n + 41 = (1)^2 + 1 + 41 = 43.$

Para $n = 2, n^2 + n + 41 = (2)^2 + 2 + 41 = 47.$

Para $n = 39, n^2 + n + 41 = (39)^2 + 39 + 41 = 1601.$

Para $n = 40, n^2 + n + 41 = (40)^2 + 40 + 41 = 40(40+1) + 41 = 40(41) + 41$

$= 41(40+1) = 41 \text{ x } 41$

lo cual nos indica que no es un número primo (es un número compuesto).

6.2 Formas condicionales

Hemos estudiado diferentes métodos de demostración y podemos observar que ellos corresponden a la estructura $H \Rightarrow T$, o contienen dicha estructura; por eso debemos estudiar algunos elementos de la lógica proporcional.

Recordemos que si p y q son proposiciones siempre se verifica que:

a. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

b. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

c. $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

d. $(p \rightarrow q) \not\Rightarrow (q \rightarrow p)$

Podemos afirmar que las operaciones conjunción $(\wedge)$, disyunción $(\vee)$ y bicondicionalidad $(\leftrightarrow)$ son conmutativas, mientras que el condicional carece de dicha propiedad.

Dado el condicional $(p \rightarrow q)$ podemos obtener los siguientes condicionales que nos pueden ayudar en el proceso deductivo de la geometría:

a. $q \rightarrow p$ llamado *recíproco* (contrapuesto) del condicional $p \rightarrow q$
b. $\sim q \rightarrow \sim p$ se llama *contradirecto* del condicional $p \rightarrow q$
c. $\sim p \rightarrow \sim q$ conocido como *recíproco del contradirecto* (contrarrecíproco) del condicional $p \rightarrow q$

Lo anterior lo podemos establecer en el siguiente esquema.

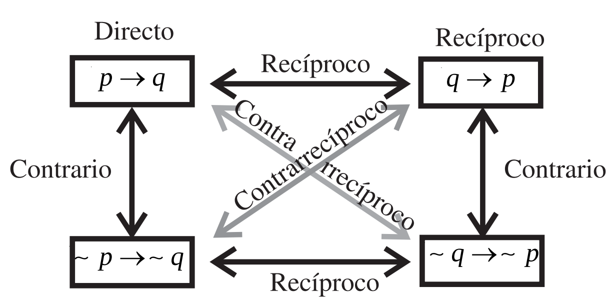


Figura 6.1

Dinostrato

La cuadratura del círculo (construcción con regla y compás de un cuadrado con área igual a la de un círculo dado) es un famoso problema que data de la época griega y fue propuesto, entre otros, por Dinostrato. La imposibilidad de esta construcción fue demostrada en 1882.

Podemos observar que en la demostración indirecta $(\sim T \Rightarrow \sim H)$ utilizamos el contradirecto de $H \Rightarrow T$.

Ejemplo 6.2.1

Dadas las proporciones:

p: «El número n es un número natural»
q: «El número n es un número entero», entonces,
$p \to q$: «Si el número n es un número natural, entonces es un número entero»

a. El *recíproco* de $p \to q$ es $q \to p$: «Si el número n es un entero, entonces n es un número natural»
b. El *contradirecto* de $p \to q$ es $\sim q \to \sim p$: «Si el número n no es un entero, entonces n no es un número natural»
c. El *recíproco* del *contradirecto* de $p \to q$ es $\sim p \to \sim q$: «Si el número n no es natural, entonces n no es un número entero».

Auto Evaluación Autoevaluación

Capítulo 1 Algunos métodos de demostración

Módulos 1 al 6

Demuestre los siguientes teoremas en el sistema de los números reales:

1. Si a, b, c, d son números reales, entonces:
   $a + (b + c + d) = (a + b) + (c + d)$.

2. Sean a, b y c números reales, entonces:
   $a + c = b + c \Rightarrow a = b$.

3. Sean a, b y c números reales, entonces:
   $a + b = c \Rightarrow a = c - b$.

4. Para todo número real a, se cumple que $-(-a) = a$.

5. Para todo número real a se cumple que $(-1)\,a = -a$.

6. Que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

7. Si a, b y c son números reales tales que $ac \leq bc$ y c > o, entonces $a \leq b$.

8. Si a, b son números reales y $a > b > 0$, entonces $a^{-1} < b^{-1}$.

9. Si a y b son enteros impares, entonces ab es impar.

10. Si a^2 es impar, entonces a es impar.

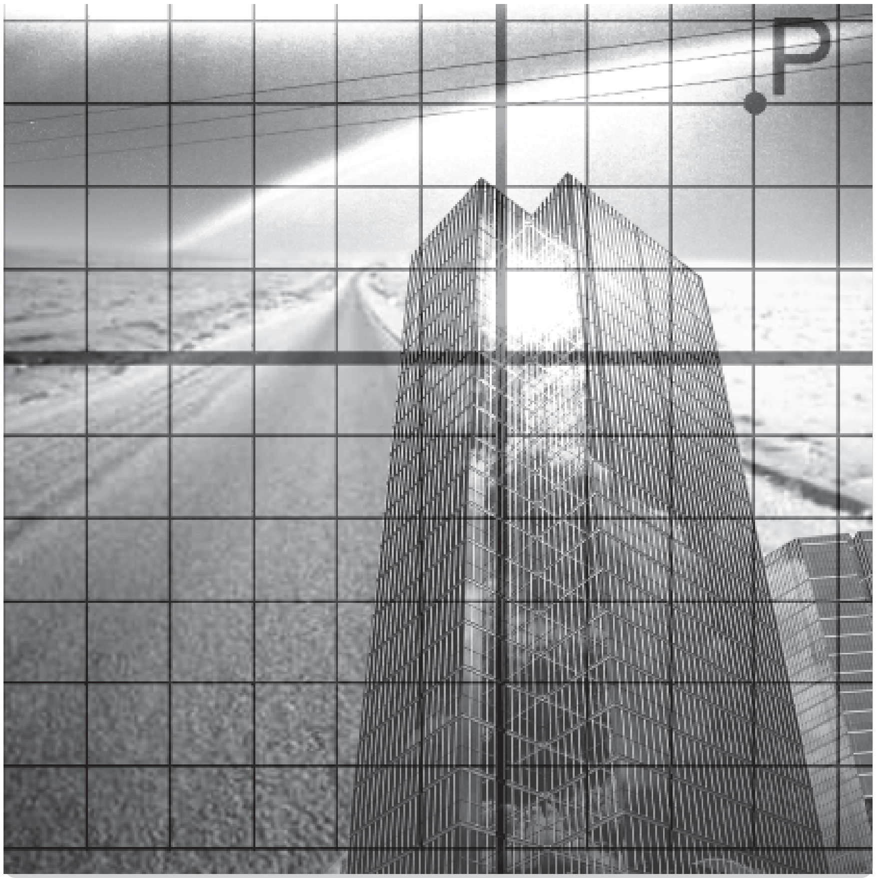
Refute por contraejemplo las siguientes afirmaciones:

11. Para todo par de números reales a, b se cumple que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

12. Para todo par de números reales a y b se cumple que $(a - b)^3 = (b - a)^3$.

13. Ningún número entero positivo par es primo.

14. Todo número múltiplo de 2 y 3 es múltiplo de 12.



Capítulo 2
Elementos básicos de la geometría

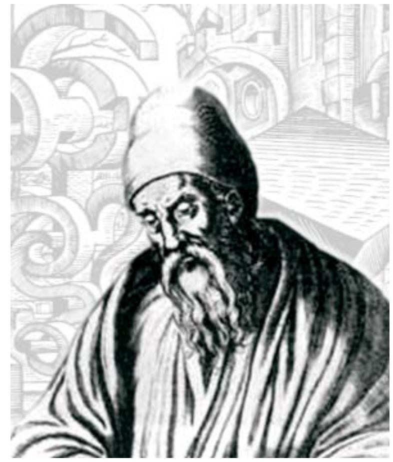
Contenido breve

Presentación

Como toda ciencia, la geometría tiene en sus inicios unos términos primitivos o no definidos que se relacionan entre sí para formar la estructura sólida. Uno de los términos que están relacionados con los términos primitivos son los postulados, y son precisamente ellos los que inician este capítulo para poder establecer un orden y un rigor lógico posterior. Luego se presentan términos ya definidos, basados en los primitivos, y propiedades que se van generando, tales como la medida, la congruencia y la igualdad, tanto de segmentos como de ángulos. Por último se estudian las características generales que presentan los polígonos y la circunferencia.

Módulo 7

Postulados



Euclides

(fl. 300 a.C.). Matemático griego, famoso por sus tratados de geometría.

Contenidos del módulo

7.1 Postulados de incidencia
7.2 Postulados de orden

Objetivos del módulo

1. Identificar los términos primitivos.
2. Diferenciar un postulado de un teorema o un corolario.
3. Aplicar los postulados en las demostraciones de proposiciones.
4. Manejar los conceptos y notaciones de los elementos básicos de la geometría.

Preguntas básicas

1. ¿Qué son términos primitivos?
2. ¿Qué relación hay entre ellos?
3. ¿Cómo se pueden ordenar las partes?
4. ¿Cómo se relacionan entre sí los términos más primitivos?
5. ¿Cuál es la diferencia entre segmento, rayo, semirrecta, plano y semiplano?

Introducción

Vimos en el capítulo anterior que sólo existían en geometría los elementos primitivos llamados punto, recta, plano, de los cuales tenemos una idea intuitiva y aceptamos su existencia y con respecto a los cuales se dan ciertas relaciones primitivas de pertenencia (estar en), colinealidad (entre), congruencia. Estos términos y relaciones primitivas se pueden relacionar entre sí mediante enunciados tales como:

El punto *M* está en la recta *L*.
El punto *P* está entre los puntos *M* y *N* de la recta *L*.

Con base en los términos primitivos y las relaciones podemos empezar el proceso deductivo de la geometría, no sólo presentando los postulados sino deduciendo además los teoremas que se desprenden de ellos y dando las definiciones que sean necesarias.

Los postulados los podemos clasificar como postulados de incidencia (existencia y enlace), de orden (estar en), de congruencia (igualdad según Euclides), continuidad y paralelismo.

Vea el módulo 7 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

7.1 Postulados de incidencia

Son los postulados que nos manifiestan la existencia de los elementos primitivos y los enlaces entre ellos.

Postulado 7.1.1 (Postulado de la recta)
Dos puntos diferentes determinan una *recta* a la cual pertenecen.

Notación
Los puntos los designamos con letras latinas mayúsculas: $A, B, C, \cdots$. La recta la representamos gráficamente como en la figura 7.1.

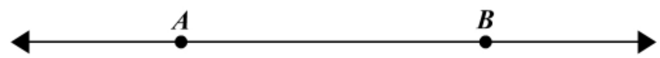


Figura 7.1

Simbólicamente la podemos nombrar como la recta ℓ (con letra minúscula) o con dos puntos de la recta y escribimos la recta *AB*, o bien: $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BA}$.

Definición 7.1.1: Colinealidad

Tres o más puntos están alineados o son *colineales* si y sólo si están en una misma recta.

Postulado 7.1.2
A toda recta pertenecen al menos dos puntos diferentes.

Postulado 7.1.3
Dada una recta, existe por lo menos un punto que no está en la recta.

Postulado 7.1.4 (Postulado del plano)
Tres puntos no colineales determinan un plano y sólo uno al cual pertenecen. Gráficamente representamos un plano como en la figura 7.2 y lo nombramos como plano *M* o plano α.

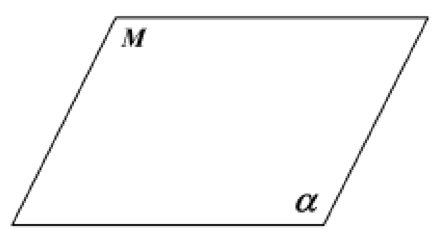


Figura 7.2

Definición 7.1.2: Coplanar

Cuatro o más puntos son *coplanares* si y sólo si están en un mismo plano.

Postulado 7.1.5
Si dos puntos diferentes de una recta están en un plano, entonces la recta entera está contenida en el plano.

Postulado 7.1.6
Si dos planos diferentes tienen un punto común, entonces tienen por los menos otro punto común.

El postulado 7.1.2 establece que la intersección de dos planos diferentes es una recta. ¿Por qué?

Definición 7.1.3

Dos rectas se intersecan o se cortan si y sólo si tienen un punto común.

Definición 7.1.4

Dos rectas que se cortan en un punto se llaman rectas *incidentes*.

Postulado 7.1.7
Dado un plano, existe por lo menos un punto que no está en el plano.

Postulado 7.1.8 (Postulado del espacio)
Cuatro puntos no coplanares determinan el espacio.

Definición 7.1.5

El *espacio* es el conjunto de todos los puntos.

Definición 7.1.6

Una *figura geométrica* es un conjunto no vacío de puntos.

Definición 7.1.7

Dos figuras geométricas F_1 y F_2 son iguales si y sólo si coinciden en todos sus puntos, y escribimos $F_1 = F_2$.

7.2 Postulados de orden

Con estos postulados vamos a ordenar los puntos y a establecer relaciones entre ellos, como la de "estar entre", una de las relaciones primitivas.

Si en una recta escogemos tres puntos M, N, P y el punto N está entre los otros dos, podemos decir que N está entre M y P, o bien que N está entre P y M y lo representamos gráficamente como en la figura 7.3.

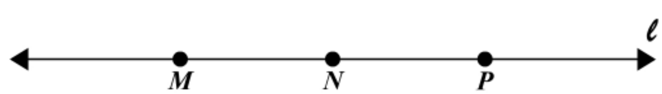


Figura 7.3

Lo importante es que N esté entre los dos puntos. Simbólicamente escribimos $M - N - P$, o bien $P - N - M$.

Euclides

Su obra máxima, *Elementos de geometría*, es una compilación de obras de autores anteriores (entre los que destaca Hipócrates de Quíos). *Elementos* contiene un extenso tratado de matemáticas en trece volúmenes. Los seis primeros corresponden a lo que se entiende como geometría elemental; en ellos Euclides recoge las técnicas geométricas utilizadas por los pitagóricos para resolver ejemplos de ecuaciones lineales y cuadráticas, e incluyen también la teoría general de la proporción. Los libros del séptimo al décimo tratan de cuestiones numéricas y los tres restantes se ocupan de la geometría de los sólidos, hasta culminar en la construcción de los cinco poliedros regulares y sus esferas circunscritas, que había sido ya objeto de estudio por parte de Teeteto.

Los *Cálculos* (una colección de teoremas geométricos), los *Fenómenos* (una descripción del firmamento), la *Óptica*, la *División del canon* (un estudio matemático de la música) y otros libros se han atribuido durante mucho tiempo a Euclides.

Euclides estableció lo que había de ser la forma clásica de una proposición matemática: un enunciado deducido lógicamente a partir de unos principios previamente aceptados.

Postulado 7.2.1

Dados dos puntos diferentes M y N de una recta ℓ, existe por lo menos un punto P de la recta tal que P está entre M y N, y escribimos $M-P-N$ (figura 7.4).

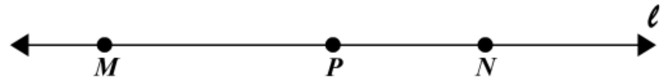


Figura 7.4

Nota: si P está entre M y N $(M-P-N)$, entonces M es diferente de N.

Postulado 7.2.2

Dados dos puntos diferentes M y N de una recta ℓ, existe por lo menos un punto Q sobre la recta ℓ tal que N está entre M y Q (figura 7.5), y escribimos $M-N-Q$.

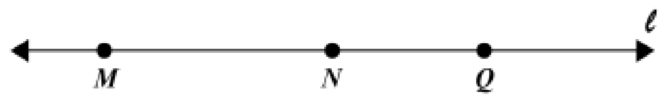


Figura 7.5

Postulado 7.2.3

Dados dos puntos diferentes M y N de una recta ℓ, existe por lo menos un punto K sobre la recta tal que M está entre K y N (figura 7.6), y escribimos $K-M-N$.

Figura 7.6

Postulado 7.2.4

Dados tres puntos diferentes de una recta, uno y sólo uno de ellos está entre los otros dos. Este postulado establece que si $A-C-B$, entonces $B-C-A$, pero no $C-A-B$ ni $A-B-C$.

Nota: si A, B, C son puntos sobre una recta y en ese orden, podemos decir que A "precede" a B, y B precede a C, A precede entonces a C, lo cual simbolizamos por $A-B-C$.

Postulado 7.2.5

Si N está entre M y P, y X está entre N y P, entonces X está entre M y P (figura 7.7).

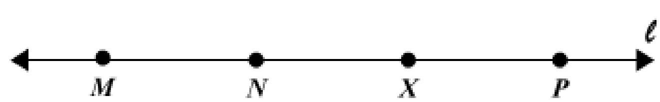


Figura 7.7

Definición 7.2.1: Segmento rectilíneo

Sean A y B dos puntos diferentes de una recta. Al conjunto formado por A y B y los puntos de la recta que están entre A y B se le llama segmento *rectilíneo* AB y lo denotamos $\overline{AB}$ (figura 7.8).

Los puntos A y B son los extremos del segmento y no importa cuál de ellos escribimos primero, o sea que $\overline{AB} \equiv \overline{BA}$. Los puntos de la recta entre A y B son el interior del segmento y lo denotamos $\overset{\circ\!-\!\circ}{AB}$.

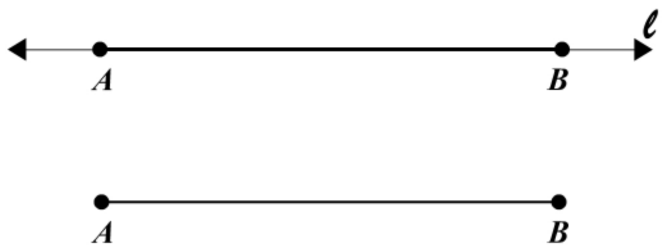


Figura 7.8

Si A y B representan el mismo punto decimos que $\overline{AB} = \overline{AA} = \overline{BB}$ es el segmento nulo.

Postulado 7.2.6 (De la separación de la recta)
Sea O un punto de una recta ℓ, los demás puntos de la recta forman dos conjuntos M, N (figura 7.9), tales que:

a. Su intersección es el vacío: $M \cap N = \phi$.

b. Si $A \in M$ y $B \in M$, entonces $\overline{AB}$ está contenido en M, y si $C \in N$ y $D \in N$, entonces $\overline{CD}$ está contenido en N.

c. Si $A \in M$ y $C \in N$, entonces $O \in \overline{AC}$. Es decir, $A - O - C$ (figura 7.9).

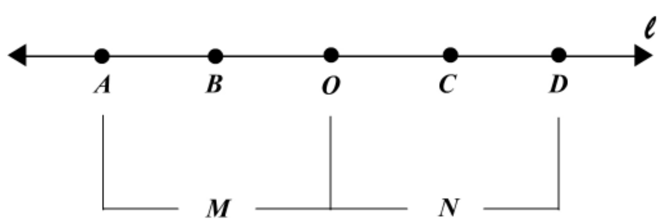


Figura 7.9

d. $M \cup \{O\} \cup N =$ recta ℓ.

Definición 7.2.2: Semirrecta

Un punto O de una recta ℓ y los puntos X de la recta que están a un mismo lado de O determinan el *rayo OX* (figura 7.10) y lo denotamos $\overrightarrow{OX}$. Si no se incluye el punto

O tenemos la *semirrecta OX* y la denotamos $\overset{\circ\!\!\longrightarrow}{OX}$.

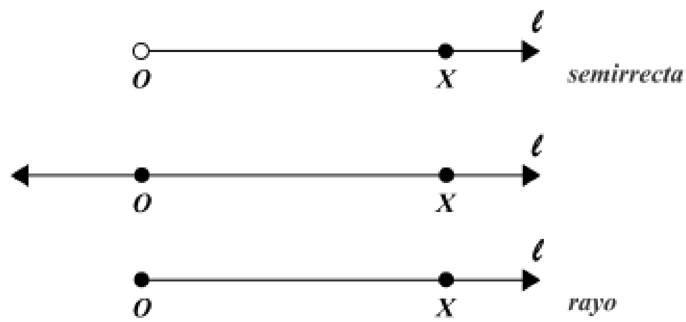


Figura 7.10

Como podemos observar de la figura 7.10, la semirrecta OX es diferente de la semirrecta XO, es decir, $\overset{\circ\!\!\longrightarrow}{OX} \neq \overset{\circ\!\!\longrightarrow}{XO}$, al igual que los rayos $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{XO}$.

En el postulado de la separación de la recta (figura 7.9) los conjuntos M y N son las semirrectas $\overset{\circ\!\!\longrightarrow}{OA}, \overset{\circ\!\!\longrightarrow}{OC}$.

Si O, A y B son puntos colineales y $A-O-B$, decimos que $\overset{\circ\!\!\longrightarrow}{OA}$ y $\overset{\circ\!\!\longrightarrow}{OB}$ son semirrectas opuestas (figura 7.11) y que $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son rayos opuestos.

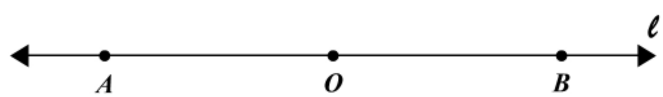


Figura 7.11

Definición 7.2.3: Semiplano

Toda recta ℓ, de un plano M, determina dos conjuntos llamados *semiplanos*. La recta se llama borde o frontera del semiplano y no pertenece al semiplano (figura 7.12).

A los semiplanos los nombramos por medio de la recta y un punto de uno de los semiplanos. Así, los semiplanos α_1 y α_2 de la figura 7.12 los nombramos así: semiplano α_1 por $\ell(A)$; semiplano α_2 por $\ell(C)$.

Si los puntos A y B están en un mismo semiplano $\ell(A)$, entonces $\overline{AB}$ está contenido en el mismo semiplano. Lo mismo ocurre con $\overline{CD}$ en el semiplano α_2.

Si los puntos B y C están en diferentes semiplanos, entonces $\overline{BC}$ corta a la recta ℓ en P.

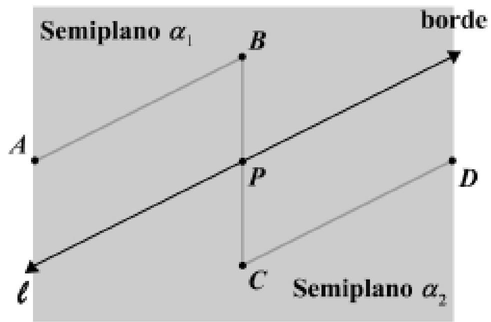


Figura 7.12

Postulado 7.2.7 (De la separación del plano)
Sea ℓ una recta de un plano *M*, los demás puntos del plano (diferentes a los de la recta) forman dos conjuntos α_1 y α_2 disjuntos tales que (figura 7.12):

a. $\alpha_1 \cap \ell = \alpha_2 \cap \ell = \alpha_1 \cap \alpha_2 = \phi$.

b. $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \ell =$ plano.

c. Si $B \in \alpha_1$ y $C \in \alpha_2$, entonces $\overline{BC}$ corta la recta ℓ en un punto *P*.

d. Si $A \in \alpha_1$ y $B \in \alpha_1$, entonces $\overline{AB}$ está en el semiplano $\ell(A)$.

e. Si $C \in \alpha_2$ y $D \in \alpha_2$, entonces $\overline{CD}$ está en el semiplano $\ell(C)$.

Así como el punto separa a la recta y la recta al plano, el plano separa al espacio en dos conjuntos disjuntos llamados semiespacios. El plano que los separa se llama cara de cada uno de ellos.

Definición 7.2.4

Un conjunto de puntos *M* del plano es *convexo* si y sólo si para cada par de puntos *P* y *Q* de *M* el segmento $\overline{PQ}$ está contenido en *M*. En caso contrario decimos que es *no convexo*.

Los siguientes conjuntos de puntos del plano son convexos (figura 7.13):

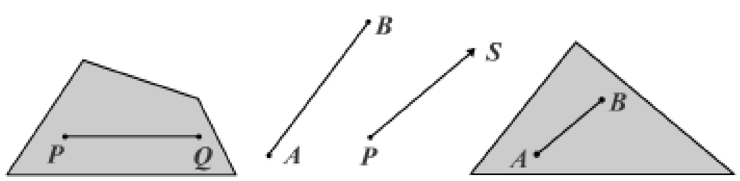


Figura 7.13

En la figura 7.14 se muestran regiones del plano que no son convexas.

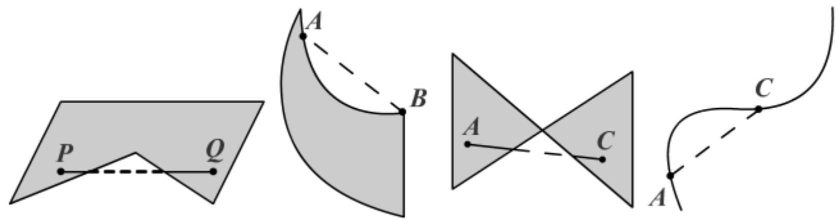


Figura 7.14

El punto, el segmento, la semirrecta, la recta, el plano y el espacio son conjuntos convexos.

Ejercicios

Módulo 7

1. En cada uno de los siguientes casos determine si la proposición es verdadera o es falsa.

    - La unión de dos conjuntos no puede ser el conjunto vacío.
    - La intersección de dos planos puede ser un segmento.
    - Un plano contiene por lo menos tres puntos.
    - Dos rectas se pueden cortar en dos puntos diferentes.
    - ℓ es una recta. Si $\overline{AB} \cap \ell = \phi$ y $\overline{BC} \cap \ell = \phi$, entonces $\overline{AC} \cap \ell = \phi$.
    - Si $\overline{AB} \cap \ell \neq \phi$ y $\overline{BC} \cap \ell = \phi$, entonces $\overline{AC} \cap \ell \neq \phi$.
    - Si $\overline{AB} \cap \ell \neq \phi$, entonces A y B se encuentran en semiplanos diferentes.
    - Si M pertenece al semiplano $\ell(A)$, entonces $\overline{AM}$ corta a la recta ℓ.
    - La unión de dos semiplanos es un semiplano.
    - La unión de dos semirrectas es una recta.
    - Si N no está entre M y P, entonces P está entre M y N.
    - La semirrecta AB tiene punto inicial y punto terminal.
    - Si $\overline{AB} = \overline{BA}$, entonces $A = B$.
    - La recta tiene extremos.
    - Toda recta está contenida en un plano.

Con base en los postulados responda cada una de las siguientes preguntas (2 a 7).

2. ¿Cuántos puntos contiene un segmento? ¿Una recta?

3. ¿Cuántas rectas pueden pasar por un punto dado? ¿Cuántos planos?

4. ¿Cuántas rectas pueden pasar por dos puntos diferentes? ¿Cuántos planos?

5. ¿Por tres puntos diferentes cuántas rectas pueden pasar? ¿Cuántos planos?

6. Tres puntos diferentes *A*, *B*, *C* en un plano, ¿cuántos segmentos determinan? ¿Cuántas semirrectas?

   a. Si son colineales.
   b. Si no son colineales.

7. Cuatro puntos *A*, *B*, *C*, *D* coplanarios tres a tres:

   a. ¿Cuántos segmentos determinan?
   b. ¿Cuántas semirrectas determinan?
   c. ¿Cuántos planos determinan?

Con base en los postulados justifique las siguientes proposiciones.

8. Una recta y un punto exterior a ella determinan un único plano que las contiene.

9. Dos rectas incidentes determinan un único plano que las contiene.

10. El punto donde se cortan dos rectas es único.

Módulo 8

Segmentos

Contenidos del módulo

8.1 Medida de segmentos.

Objetivos del módulo

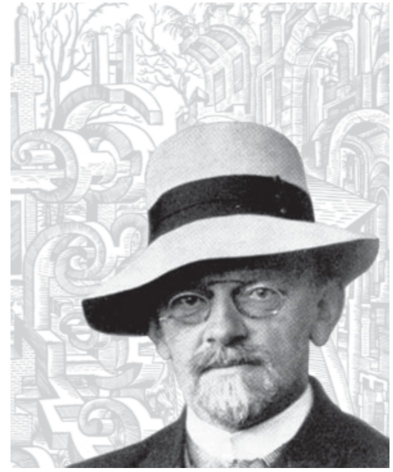
1. Diferenciar un segmento de su medida.
2. Identificar los tipos de segmentos.
3. Enunciar las propiedades de las medidas del segmento.
4. Construir un segmento.
5. Diferenciar entre congruencia e igualdad.
6. Determinar si un punto es o no punto medio de un segmento.
7. Sumar y restar segmentos.

Preguntas básicas

1. ¿Cuál es la medida de un segmento?
2. ¿Qué propiedades tiene la medida de segmentos?
3. ¿Cómo se construye un segmento?
4. ¿Qué son segmentos congruentes?
5. ¿Cuándo dos segmentos son iguales?
6. ¿Cuándo un punto es punto medio de un segmento?
7. ¿Qué operaciones se hacen con segmentos?

Introducción

Uno de los elementos más usados en la geometría es el segmento rectilíneo y muy especialmente su medida, no sólo en teoremas que se van a demostrar sino también en problemas de cálculo numérico. Con este módulo se inicia esa parte operativa de la geometría y la aplicación de postulados aceptados y teoremas demostrados.



David Hilbert

(1862-1943). Matemático y filósofo alemán nacido en Königsberg (hoy Kaliningrado, Rusia).

Vea el módulo 8 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

8.1 Medida de segmentos

Dados los conjuntos infinitos de igual número de elementos, es posible asociar cada elemento de un conjunto, exactamente, con un elemento del otro; decimos entonces que hay una correspondencia biunívoca entre los elementos de los dos conjuntos. Podemos entonces establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y los números reales, diciendo que a cada punto de la recta le corresponde uno y sólo un número real y a cada número real le corresponde un único punto de la recta.

En geometría nos referimos a menudo a la "distancia" entre los puntos *A* y *B* o bien a la medida del segmento *AB*.

Postulado 8.1.1 (De la distancia)
A cada par de puntos diferentes les corresponde un único número real no negativo.

Definición 8.1.1

A cada par de puntos diferentes *A* y *B* corresponde un único número real no negativo llamado la *distancia* entre *A* y *B*, o también la *medida* del segmento *AB* y la cual denotamos como $d(A,B) = m(\overline{AB})$.

La distancia entre dos puntos o la medida del segmento determinado por ellos tiene las siguientes propiedades:

a. $m(\overline{AB}) = d(A,B) \geq 0$.

b. $m(\overline{AB}) = m(\overline{BA}) = d(A,B) = d(B,A)$.

c. $m(\overline{AB}) = d(A,B) = 0$ si y sólo si *A* coincide con $B(A = B)$.

La propiedad (c) nos dice que al segmento nulo (o al punto) le asignamos una medida cero.

Para abreviar en la nomenclatura de la $d(A,B) = m(\overline{AB})$, escribimos simplemente *AB*. Debemos tener presente que cuando escribimos $\overline{AB}$ nos referimos a la figura geométrica del segmento y con *AB* nos referimos a un número que es la medida o longitud del segmento *AB*.

Para medir un segmento o determinar la distancia entre dos puntos *A* y *B* debemos escoger una unidad de longitud o de medida: decímetro, metro, yarda, pulgada, pie, etc. Hay problemas en los cuales se mencionan varias unidades, pero siempre debemos trabajar en una cualquiera (todas se reducen a la unidad escogida).

Supongamos que tenemos los puntos *A* y *B* y una regla con marcas en cm (figura 8.1):

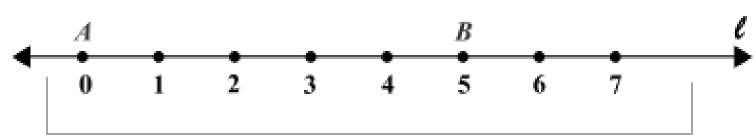


Figura 8.1

Es claro que la distancia entre A y B no depende de cuál de los dos puntos se nombre primero, $d(A,B)=d(B,A)$, ni de la colocación de la regla.

Si ponemos la regla de tal manera que el cero coincida con A, es fácil hacer la lectura y vemos que la distancia es 5 cm.

Si ponemos la regla de tal manera que el 4 coincida con A, vemos que al punto B le corresponde el 9. En este caso la distancia entre A y B será $9-4=5$ cm (figura 8.2). También podemos hacer esta lectura como $4-9=-5$, pero como la distancia siempre es positiva tomamos el valor absoluto de la diferencia entre los números y tenemos así la siguiente definición de distancia.

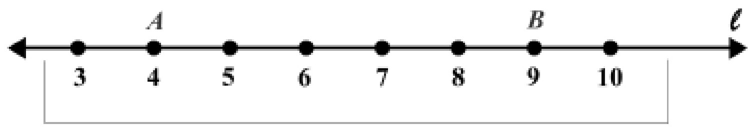


Figura 8.2

Definición 8.1.2

La distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la diferencia entre los números reales correspondientes.

Ejemplo 8.1.1

En la figura 8.3 consideremos los puntos *A, B, C, D, E* y encontremos algunas distancias o medidas de los segmentos determinados.

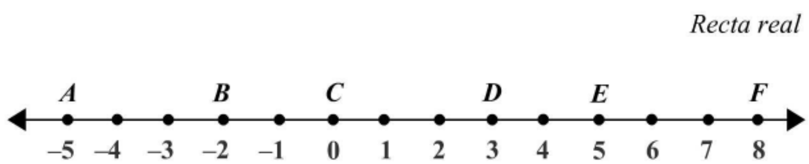


Figura 8.3

Solución

De la figura obtenemos:

$$AB=|-5-(-2)|=|-5+2|=|-3|=3$$

$$AC=|-5-0|=|-5|=5$$

$$BD=|-2-3|=|-5|=5$$

$$DE=|3-5|=|5-3|=2$$

$$BF=|-2-8|=|8-(-2)|=|-10|=|10|=10$$

Definición 8.1.3

En la recta real el número que le corresponde a un punto se llama *coordenada* del punto. Así, en el ejemplo 8.1.1 la coordenada de A es -5, la coordenada de B es -2 y la del punto E es 5. Vemos entonces que la distancia entre dos puntos de la recta

David Hilbert

Aunque Hilbert trabajó en diversos campos de las matemáticas, que incluyen la teoría de números y el cálculo de variaciones, es particularmente famoso por sus contribuciones a la geometría, pues reemplazó toda la estructura geométrica euclidiana mediante un conjunto de 21 axiomas mucho más completos y abstractos, relacionados con puntos, líneas y planos. Las contribuciones que hizo quedaron plasmadas en su obra magna, *Fundamentos de la geometría*.

real es el valor absoluto de la diferencia entre las coordenadas correspondientes.

Postulado 8.1.2 (De la situación de puntos)

Sea *AB* un rayo y *n* un número real, entonces existe un único punto *M* en $\overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AM} = n$.

Postulado 8.1.3 (De la adición de segmentos)
Sí *A*, *B*, *C* son colineales en ese orden: $A-B-C$, entonces $AC = AB + BC$.

Teorema 8.1.1: Desigualdad de segmentos

Si $A-B-C$, entonces $AB < AC$.

Demostración (reducción al absurdo)

Supongamos que $AB \not< AC$. Por la ley de tricotomía tenemos que $AB = AC$ o $AB > AC$. Si $AB = AC$, entonces *B* coincide con *C* y sería imposible porque $A-B-C$ (se estaría contradiciendo el postulado 7.2.4). Luego $AB \neq AC$. Si $AB > AC$, entonces $A-C-B$, lo cual sería imposible porque $A-B-C$ (se estaría contradiciendo el postulado 7.2.4). Luego $AB > AC$.

Como $AB \not> AC$ y $AB \neq AC$, por la ley de tricotonomía $AB < AC$, única alternativa.

No todos los teoremas que enunciamos se demostrarán; en tales casos la demostración se dejará como ejercicio.

Teorema 8.1.2

Sean *M* y *N* dos puntos de $\overrightarrow{AB}$. Si $AM < MN$, entonces $A-M-N$.

Teorema 8.1.3

Dados una recta y un rayo que tiene su punto inicial sobre la recta pero sus otros puntos están fuera de la recta, entonces todos los puntos del rayo, excepto el punto inicial, están en el mismo semiplano de borde la recta dada. En la figura 8.4 se ilustra la situación. Sean *m* la recta y $\overrightarrow{PQ}$ el rayo que tiene su punto inicial *P* en la recta *m*.

Demostración (reducción al absurdo)

Supongamos que $\overrightarrow{PQ}$ tiene un punto *R* tal que *R* y *Q* están en semiplanos opuestos respecto a la recta *m*, entonces $\overrightarrow{RQ}$ corta a la recta *m* en un punto *T* (postulado de la separación del plano). Como $R-P-T$, entonces $\overrightarrow{RQ}$ corta también a la recta *m* en *P*, lo cual es una contradicción porque dos rectas se cortan en un punto y por consiguiente los puntos de $\overrightarrow{PQ}$ diferentes de *P* están en el semiplano $m(Q)$.

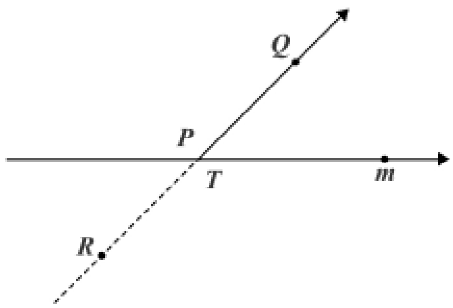


Figura 8.4

Sabemos que si dos segmentos son iguales, entonces tienen igual medida. Puede ocurrir que dos segmentos tengan igual medida y no necesariamente ser iguales, por ejemplo, dos lápices o minas pueden tener la misma longitud o medida y no necesariamente ser iguales; el nuevo concepto en la geometría hace referencia a este situación.

Definición 8.1.4: Congruencia

Dos segmentos *AB* y *CD* son *congruentes* si y sólo si tienen igual medida, y escribimos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow AB = CD.$

La congruencia se refiere por tanto a la figura geométrica.

Las propiedades de la congruencia del segmento se enuncian en el siguiente teorema.

Teorema 8.1.4

a. Todo segmento es congruente consigo mismo: $\overline{AB} \cong \overline{BA}$ (propiedad reflexiva).

b. Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ (propiedad simétrica).

c. Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ (propiedad transitiva).

Decimos entonces que la congruencia de segmentos es una relación de equivalencia.

Definición 8.1.5: Punto medio

Sea $A - M - B.$ *M* es *punto medio* de $\overline{AB}$ si y sólo si divide a $\overline{AB}$ en dos segmentos congruentes, $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ (figura 8.5).

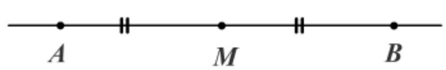


Figura 8.5

Si *M* es punto medio de $\overline{AB}$, de acuerdo con la definición tenemos que $AM = MB = \frac{1}{2} AB$.

Teorema 8.1.5

El punto medio de un segmento es único.

Demostración (reducción al absurdo)

Sea $\overline{AB}$ y M el punto medio de $\overline{AB}.$ Supongamos que el punto M no es único; sea P otro punto medio de $\overline{AB},$ entonces $AP = PB = \frac{1}{2} AB.$ Como $AM = MB = \frac{1}{2} AB$ (M es punto medio de $\overline{AB}$), tenemos una contradicción con el postulado de la situación de puntos $(AP = AM).$ Luego M es único.

Postulado 8.1.4 (De la construcción de segmentos)

Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo y $\overline{MP}$ un segmento cualquiera, entonces existe un único punto $Q \in \overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{MP} \cong \overline{AQ}$ (figura 8.6).

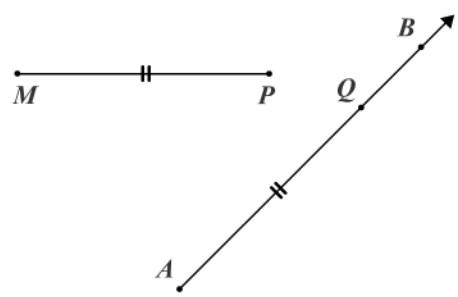


Figura 8.6

Teorema 8.1.6: Adición de segmentos

Sean $A-B-C$ y $M-N-P.$ Si $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ y $\overline{BC} \cong \overline{NP},$ entonces $\overline{AC} \cong \overline{MP}$ (figura 8.7).

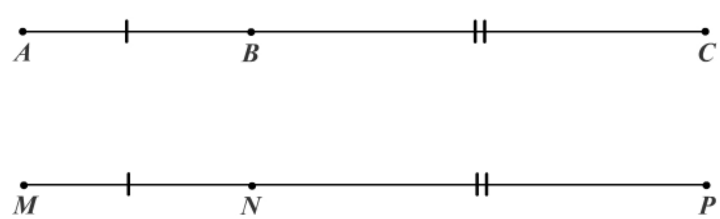


Figura 8.7

Demostración

Por la definición de congruencia, $AB = MN$ y $BC = NP.$ Por el postulado de la adición de segmentos tenemos $AC = AB + BC$ y $MP = MN + NP.$ Si sustituimos las medidas en $AC,$ obtenemos $AC = MN + NP.$ Luego $\overline{AC} \cong \overline{MP}$ porque tienen igual medida.

Teorema 8.1.7: Sustracción de segmentos

Sean $A-B-C$ y $M-N-P$. Si $\overline{AC} \cong \overline{MP}$ y $\overline{AB} \cong \overline{MN}$, entonces $\overline{BC} \cong \overline{NP}$.

Teorema 8.1.8

Los puntos medios de segmentos congruentes determinan segmentos congruentes.

Ejemplo 8.1.2

A, B, C, D son puntos colineales en ese orden. Si *M* y *N* son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente (figura 8.8), entonces $MN = \dfrac{AC+BD}{2}$.

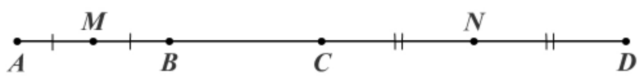


Figura 8.8

1. $AM = MB = AB/2$; $CN = ND = CD/2$, por ser *M* y *N* puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Como $A-B-C-D$, por el postulado de la adición de segmentos tenemos:

2. $MN = MB + BC + CN$.

   Si sustituimos 1 en 2, obtenemos:
   $MN = 1/2\, AB + BC + 1/2\, CD$, y aplicando propiedades de los reales llegamos a:
   $MN = \dfrac{(AB+BC)+(BC+CD)}{2}$; por adición de segmentos: $MN = \dfrac{AC+BD}{2}$.

Ejercicios
Módulo 8

1. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.

- Dos rectas son congruentes si y sólo si tienen igual longitud.
- Dos rectas son congruentes si y sólo si coinciden en todos sus puntos.
- Dos rectas no pueden ser congruentes.
- Sea $M \in \overline{AB}$. Si $\overline{AM} \cong \overline{MB}$, entonces M es punto medio de $\overline{AB}$.
- Si $m(\overline{AB}) + m(\overline{AC}) = m(\overline{BC})$, entonces $A - B - C$.
- Si A, B, C, D son colineales, entonces $AD = AC + BD$.
- Si $\overline{AC} \cong \overline{CB}$, entonces C es punto medio de $\overline{AB}$.
- Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\overline{AB} = \overline{CD}$.
- Si $AB = CD$, entonces $\overline{AB} = \overline{CD}$.
- Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $AB = CD$.
- Si $\overline{AB} = \overline{CD}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
- Si $\overline{AB} = \overline{CD}$, entonces $AB = CD$.

Sobre una recta se dan unos puntos con sus coordenadas correspondientes, como se indica en la figura 1. Con base en esa información responda las preguntas 2 a 14 de la tabla adjunta, además de las preguntas 15 a 17.

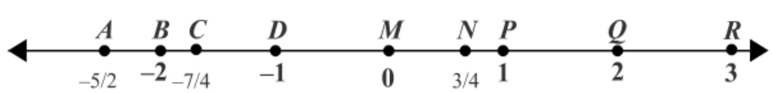


Figura 1

2. $m\left(\overline{NP}\right) =$	3. $m\left(\overline{RN}\right) =$	4. $m\left(\overline{DP}\right) =$
5. $m\left(\overline{CN}\right) =$	6. $m\left(\overline{AD}\right) =$	7. $m\left(\overline{NA}\right) =$
8. $m\left(\overline{AC}\right) =$	9. $m\left(\overline{QC}\right) =$	10. $m\left(\overline{RB}\right) =$
11. $m\left(\overline{BM} \cup \overline{DM}\right) =$	12. $m\left(\overrightarrow{CP} \cup \overrightarrow{NA}\right) =$	13. $m\left(\overline{DQ} - \overline{BM}\right) =$
14. $m\left(\overline{AM} \cup \overline{MR}\right) =$		

15. La coordenada del punto medio de $\overline{MR}$ es:

16. La coordenada del punto medio de $\overline{AR}$ es:

17. La coordenada del punto medio de $\overline{CQ}$ es:

18. Sean A, B, C, D cuatro puntos colineales en ese orden. Si $AB = CD = m,$ $BC = n,$ ¿entonces el punto medio de $\overline{BC}$ y de $\overline{AD}$ es el mismo?

19. Demuestre el teorema 8.1.2.

20. Demuestre el teorema 8.1.7.

21. Demuestre el teorema 8.1.8.

Módulo 9

Ángulos

Contenidos del módulo

9.1 Ángulos
9.2 Medida de ángulos
9.3 Clases de ángulos

Objetivos del módulo

1. Definir un ángulo.
2. Denotar un ángulo.
3. Medir un ángulo.
4. Diferenciar entre congruencia, medida, igualdad de ángulos.
5. Identificar las clases de ángulos.
6. Identificar la bisectriz de un ángulo.
7. Resolver problemas sobre ángulos.
8. Identificar rectas perpendiculares.

Preguntas básicas

1. ¿Cuáles son los elementos de un ángulo?
2. ¿Qué es la medida de un ángulo?
3. ¿Cómo se mide un ángulo?
4. ¿Cuándo dos ángulos son congruentes?
5. ¿Cuándo dos ángulos son iguales?
6. ¿Qué clase de ángulos hay?
7. ¿Cuál es la bisectriz de un ángulo?
8. ¿Qué operaciones se desarrollan con ángulos?
9. ¿Qué es la mediatriz de un segmento?
10. ¿Cuándo dos rectas son perpendiculares?

Introducción

Los ángulos son otra herramienta básica en la geometría, cuya aplicación se extiende a otras asignaturas como trigonometría, física, cálculo y muchos cursos profesionales. En esta sección se estudia lo necesario para el desarrollo de la geometría.

Oswald Veblen

(1880-1960). Matemático estadounidense nacido en Decorah (Iowa) y muerto en Brooklin (Nueva York).

Vea el módulo 9 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

9.1 Ángulos

Definición 9.1.1

Un *ángulo* es la figura geométrica que resulta al unir dos rayos que tienen el mismo punto inicial. Los rayos son los lados del ángulo y el punto común es el vértice del ángulo (figura 9.1).

En la figura 9.1 la unión de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ es el ángulo AOB de vértice O y que denotamos $\angle AOB$, o $A\hat{O}B$, o $\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; si no hay lugar a confusión lo denotamos como ángulo $\angle O$ o bien $\hat{O}$. También podemos usar letras griegas y escribimos $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\theta},$ etc.

Si los dos rayos son opuestos (están en una misma recta), se obtiene *un ángulo llano* o *ángulo rectilíneo* (figura 9.2): $A\hat{O}B$ rectilíneo. Si los dos rayos coinciden, tenemos el *ángulo nulo* (figura 9.3): $A\hat{O}B$ nulo.

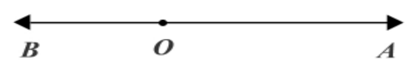


Figura 9.2

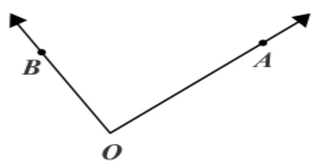


Figura 9.1

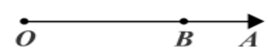


Figura 9.3

Definición 9.1.2

Un ángulo no nulo ni rectilíneo divide al plano en dos conjuntos (regiones), uno convexo llamado *interior del ángulo* y otro no convexo llamado *exterior del ángulo* (figura 9.4).

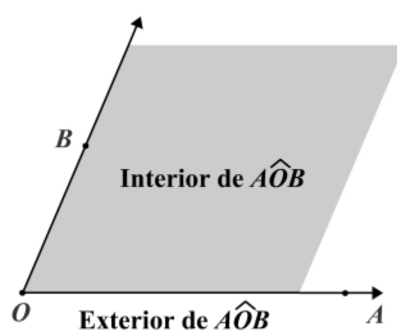


Figura 9.4

Definición 9.1.3

El ángulo unido al interior del mismo se llama *región angular* (ángulo euclídeo), es decir:

región angular = $A\hat{O}B \cup \mathrm{int}(A\hat{O}B)$.

Nota: el interior del ángulo se puede definir como la intersección de dos semiplanos, así:

$$\text{interior } A\hat{O}B = \overleftrightarrow{OA}(B) \cap \overleftrightarrow{OB}(A).$$

En el siguiente teorema se resumen algunas situaciones que se presentan en un ángulo.

Teorema 9.1.1

a. Si P es un punto de la recta ℓ, entonces la simerrecta PQ está contenida en el semiplano de borde ℓ y que contiene a Q: semiplano $\ell(Q)$ (figura 9.5).

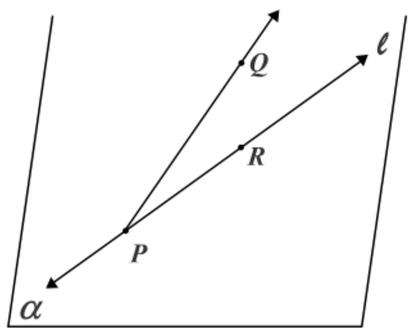


Figura 9.5

b. Si Q es un punto interior del ángulo AOB, entonces $\overrightarrow{OQ}$ está contenida en la región angular (figura 9.6).

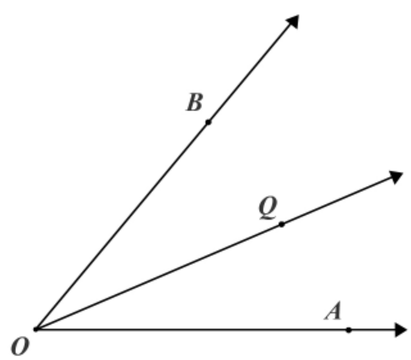


Figura 9.6

c. Dado un ángulo AOB, entonces el segmento AB está contenido en la región angular (figura 9.7).

d. Si P es un punto interior al ángulo AOB, entonces $\overrightarrow{OP}$ interseca a $\overline{AB}$ (figura 9.8).

Oswald Veblen

Oswald Veblen hizo grandes aportes al álgebra abstracta y dio el primer ejemplo de un plano proyectivo finito, es decir, un plano que no cumple con el teorema de Desargues. Desarrolló, además, un enfoque axiomático de la geometría. Escribió varios tratados sobre esta ciencia, entre los que se destacan *Geometría proyectiva*, *Fundamentos de la geometría diferencial* y *Analysis situs*. En esta última obra llevó a cabo una sistematización de las ideas desarrolladas por Jules Henri Poincaré.

En la Sociedad Matemática Americana, de la que este matemático fue presidente en 1923, se entrega anualmente el Premio Veblen en Geometría, establecido en 1964.

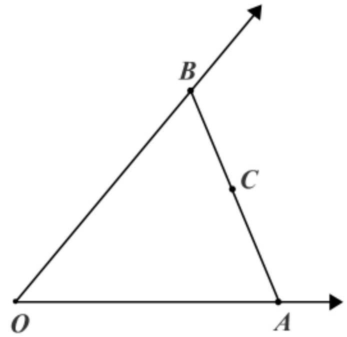


Figura 9.7

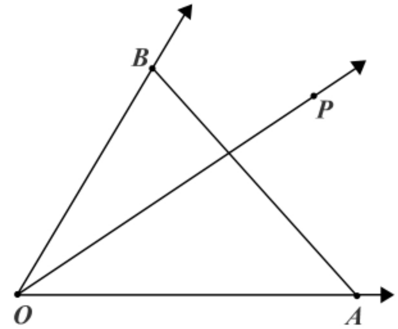


Figura 9.8

9.2 Medida de ángulos

Debemos expresar de alguna forma la "amplitud" o "abertura" que hay entre los lados de un ángulo. La unidad más usual para representar esa "abertura" de los lados es el "grado".

Definición 9.2.1 De la medida de ángulos

A todo ángulo AOB le corresponde un único número real entre 0 y 180 llamado medida, o medida en grados, del ángulo.

La medida del ángulo AOB (en grados) se escribe $m(A\hat{O}B)$, y según la definición:

$$0° \leq m(A\hat{O}B) \leq 180°.$$

En el capítulo 4 estudiaremos ampliamente los círculos y los elementos relacionados con él; por el momento aceptemos una idea intuitiva de un grado y digamos que es una trescientas sesentava parte de una circunferencia, es decir:

$1° = \frac{1}{360}$, porque la circunferencia mide 360º.

Si el ángulo es llano o rectilíneo tiene una medida de 180º y la medida de un ángulo nulo es 0º.

Así como se usa una regla numerada para estimar la medida de un segmento, podemos determinar la medida de un ángulo con la ayuda de un transportador (figura 9.9).

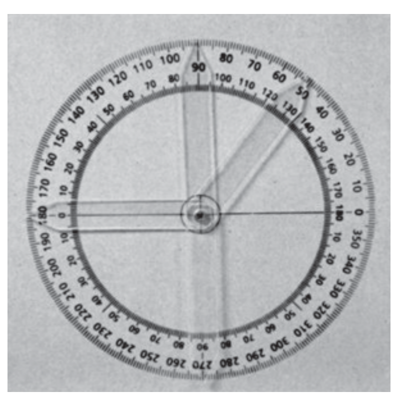


Figura 9.9. Transportador

Postulado 9.2.1 (De la construcción del ángulo)

Sea $\overleftrightarrow{AB}$ el borde de un semiplano α. Para cada número real n entre 0º y 180º existe un único rayo $\overrightarrow{AP}$ con P en α, tal que $m(B\hat{A}P) = n°$ (figura 9.10).

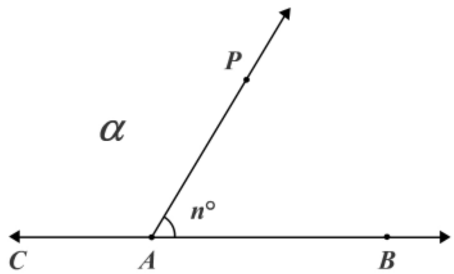


Figura 9.10

Postulado 9.2.2 (De la adición de ángulos)

Si P es un punto en el interior del $A\hat{O}B$, entonces (figura 9.11):

$$m(A\hat{O}B) = m(A\hat{O}P) + m(P\hat{O}B)$$

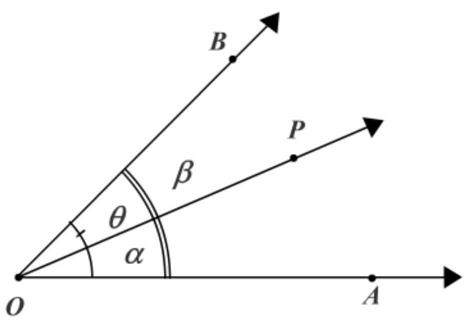


Figura 9.11

Nota: cuando usamos letras del alfabeto griego para denotar los ángulos, éstas facilitan mucho la nomenclatura para la medida de los mismos, ya que:

$\hat{\beta}$ se refiere a la figura del ángulo.

β se refiere a la medida del ángulo.

Es decir, $\hat{\beta} \neq \beta$. En la figura 9.11 tenemos que $\beta = \alpha + \theta$.

Definición 9.2.2: Congruencia de ángulos

Dos ángulos AOB y CDE son congruentes si y sólo si tienen igual medida, y escribimos $A\hat{O}B \cong C\hat{D}E$ (figura 9.12). Simbólicamente:

$A\hat{O}B \cong C\hat{D}E \Leftrightarrow m(A\hat{O}B) = m(C\hat{D}E)$.

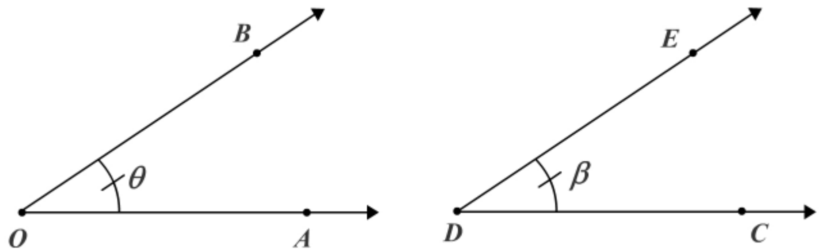


Figura 9.12

Los ángulos que son congruentes en una figura geométrica se representan con el mismo símbolo. Las propiedades de la congruencia de ángulos se enuncian en el siguiente teorema.

Teorema 9.2.1

a. Todo ángulo es congruente consigo mismo:

$A\hat{O}B \cong A\hat{O}B$ (propiedad reflexiva).

b. El orden en que se enuncie la congruencia no afecta a ésta:

Si $A\hat{O}B \cong D\hat{E}F$, entonces $D\hat{E}F \cong A\hat{O}B$ (propiedad simétrica).

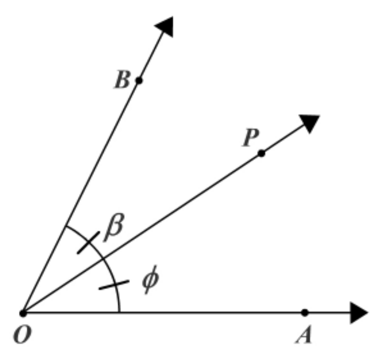
c. Dos ángulos congruentes a un tercer ángulo, son congruentes entre sí:

$A\hat{O}B \cong C\hat{D}E \wedge C\hat{D}E \cong H\hat{I}J \Rightarrow A\hat{O}B \cong H\hat{I}J$ (propiedad transitiva).

Decimos entonces que la congruencia de ángulos es una relación de equivalencia.

Definición 9.2.3: Bisectriz de un ángulo

Sea el ángulo AOB y P un punto en el interior del $A\hat{O}B$. La semirrecta OP se llama *bisectriz* del ángulo si y sólo si determina en él dos ángulos congruentes (figura 9.13).



$$\hat{\phi} \cong \hat{\beta} \Leftrightarrow \phi = \beta$$

Figura 9.13

$\overset{\circ\!\longrightarrow}{OP}$ es bisectriz de $A\hat{O}B \Leftrightarrow A\hat{O}P \cong P\hat{O}B$.

Teorema 9.2.2

La bisectriz de un ángulo es única. Su demostración se deja como ejercicio.

Teorema 9.2.3: Adición de ángulos

Si P está en el interior del $A\hat{O}B$ y Q está en el interior del $M\hat{R}S$, con $A\hat{O}P \cong M\hat{R}Q$ y $P\hat{O}B \cong Q\hat{R}S$, entonces $A\hat{O}B \cong M\hat{R}S$ (figura 9.14).

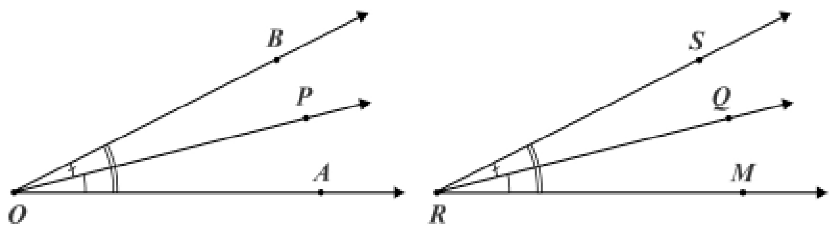


Figura 9.14

Demostración

Como P y Q son puntos interiores (hipótesis), del postulado de la adición de ángulos tenemos:

1*a*. $m(A\hat{O}B) = m(A\hat{O}P) + m(P\hat{O}B).$

b. $m(M\hat{R}S) = m(M\hat{R}Q) + m(Q\hat{R}S).$

Si aplicamos la definición de congruencia en la hipótesis obtenemos:

2*a*. $m(A\hat{O}P) = m(M\hat{R}Q).$

b. $m(P\hat{O}B) = m(Q\hat{R}S).$

Si sustituimos (2.a) y (2.b) en (1.b) obtenemos:

3. $m(M\hat{R}S) = m(A\hat{O}P) + m(P\hat{O}B).$

De las afirmaciones (1.a) y (3) tenemos:

$m(A\hat{O}B) = m(M\hat{R}S).$

Luego $A\hat{O}B \cong M\hat{R}S.$

Teorema 9.2.4: Sustracción de ángulos

Si P está en el interior del $A\hat{O}B$ y Q está en el interior del $M\hat{R}S$, con $A\hat{O}P \cong M\hat{R}Q$ y $A\hat{O}B \cong M\hat{R}S$, entonces $P\hat{O}B \cong Q\hat{R}S$ (figura 9.14). Su demostración queda como ejercicio.

Definición 9.2.4: Desigualdad de ángulos

Si D está en el interior de $A\hat{O}B$, entonces $m(A\hat{O}B) > m(D\hat{O}A)$ o $m(A\hat{O}B) > m(D\hat{O}B)$ (figura 9.15).

En adelante, si $A\hat{O}B \cong \hat{\beta}$ y $A\hat{O}D \cong \hat{\alpha}$, entonces $m(A\hat{O}B) > m(A\hat{O}D)$ se puede escribir $\beta > \alpha$, en lugar de $m(\hat{\beta}) > m(\hat{\alpha})$ o de $m(A\hat{O}B) > m(A\hat{O}D)$.

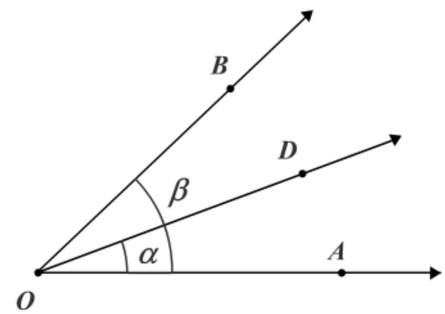


Figura 9.15

Teorema 9.2.5

Las bisectrices de ángulos congruentes determinan ángulos congruentes. La demostración se deja como ejercicio.

9.3 Clases de ángulos

Definición 9.3.1

Un ángulo es *agudo* si y sólo si su medida es mayor que 0º y menor que 90º, y un ángulo es *obtuso* si y sólo si su medida es mayor que 90º y menor que 180º.

Definición 9.3.2

Dos ángulos se llaman ángulos *complementarios* si y sólo si la suma de sus medidas es 90º y se dice que uno es el complemento del otro.

Teorema 9.3.1

Los complementos de ángulos congruentes, son congruentes.

Definición 9.3.3

Dos ángulos se llaman ángulos *suplementarios* si y sólo si la suma de sus medidas es 180º, y se dice que uno es el suplemento del otro.

Teorema 9.3.2

Los suplementos de ángulos congruentes, son congruentes.

Definición 9.3.4

Dos ángulos que tienen un lado común y los otros lados son semirrectas opuestas se dice que forman un *par lineal* (figura 9.16).

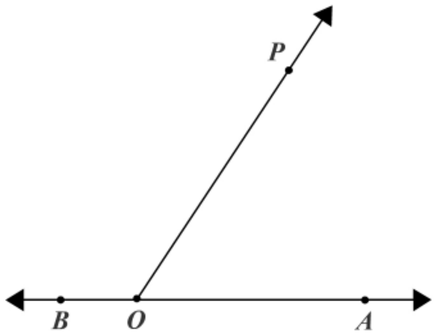


Figura 9.16

$A\hat{O}P$ y $P\hat{O}B$ forman un par lineal.

Definición 9.3.5

Dos ángulos coplanares son ángulos *adyacentes* si y sólo si tienen un lado común y los otros dos lados están situados en semiplanos diferentes cuyo borde contiene el lado común (figura 9.17).

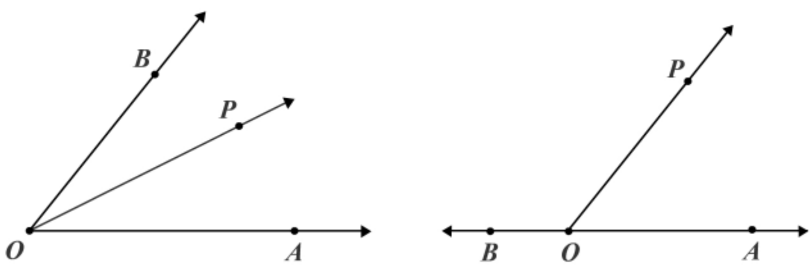


Figura 9.17

En la figura 9.17, $A\hat{O}P$ y $B\hat{O}P$ son ángulos adyacentes, pero $A\hat{O}P$ y $A\hat{O}B$ no son ángulos adyacentes.

Nota: los ángulos de un par lineal son entonces ángulos adyacentes suplementarios.

Definición 9.3.6

Dos ángulos cuyos lados son rayos opuestos se llaman ángulos *opuestos por el vértice* (figura 9.18) o *par vertical*.

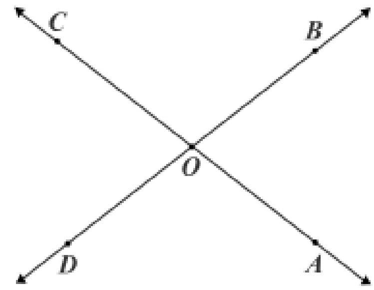


Figura 9.18

En la figura anterior $A\hat{O}B$ y $C\hat{O}D$ son opuestos por el vértice, igualmente $B\hat{O}C$ y $D\hat{O}A$.

Teorema 9.3.3

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes (figura 9.19)

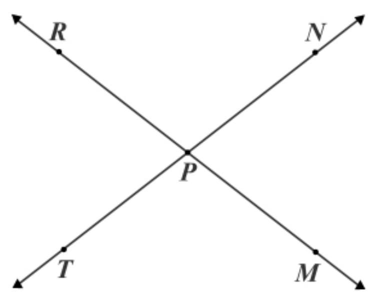


Figura 9.19

Hipótesis: $M\hat{P}N$ y $R\hat{P}T$ son opuestos por el vértice.

Tesis: $M\hat{P}N \cong R\hat{P}T$.

Demostración

$M\hat{P}N$ y $R\hat{P}T$ son opuestos por el vértice (hipótesis), y por la definición $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PM}$ son opuestos, lo mismo que $\overrightarrow{PN}$ y $\overrightarrow{PT}$, luego $M\hat{P}R$ y $N\hat{P}T$ son ángulos llanos y su medida es 180º.

Por el postulado de la adición de ángulos:

1. $m(M\hat{P}N) + m(N\hat{P}R) = m(M\hat{P}R) = 180°.$
2. $m(N\hat{P}R) + m(R\hat{P}T) = m(N\hat{P}T) = 180°.$

De 1 tenemos: $m(M\hat{P}N) = 180° - m(N\hat{P}R).$

De 2 tenemos: $m(R\hat{P}T) = 180° - m(N\hat{P}R).$

Luego: $m(M\hat{P}N) = m(R\hat{P}T),$ y concluimos que $M\hat{P}N \cong R\hat{P}T.$

Definición 9.3.7

Si los ángulos de un par lineal son congruentes, cada uno de los ángulos se llama ángulo *recto*.

Teorema 9.3.4

La medida de un ángulo recto es 90º (figura 9.20).

Corolario 9.3.1
Los ángulos rectos son congruentes.

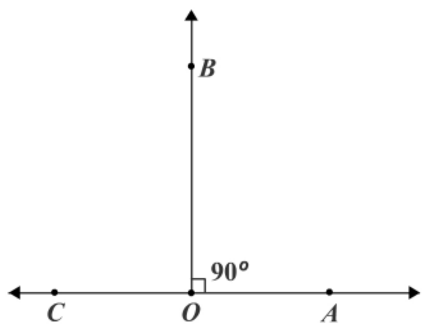


Figura 9.20

$A\hat{O}B$ y $B\hat{O}C$ son ángulos rectos.

Definición 9.3.8: Perpendicularidad

Si las rectas ℓ_1 y ℓ_2 se cortan formando un ángulo recto se dice que son *perpendiculares* y escribimos $\ell_1 \perp \ell_2$ (figura 9.21).

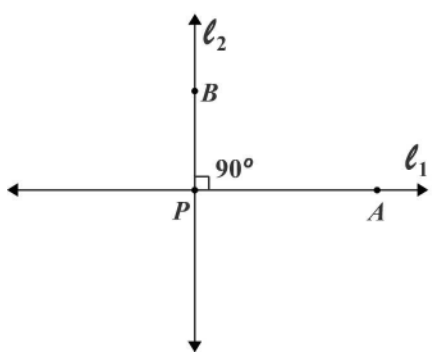


Figura 9.21

Si ℓ_1 y ℓ_2 se cortan en P y $A \in \ell_1$ y $B \in \ell_2$, entonces la definición de perpendicularidad se cumple para los rayos y los segmentos y escribimos $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$ y $\overline{PA} \perp \overline{PB}$.

Teorema 9.3.5

Dos rectas perpendiculares forman cuatro ángulos rectos.

Teorema 9.3.6

Si dos rectas incidentes forman ángulos adyacentes congruentes, son perpendiculares (figura 9.22).

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ incidentes en O, $C\hat{O}B \cong C\hat{O}A$.

Tesis: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

Demostración

$A-O-B$ y $C-O-D$ porque $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son incidentes en O. Además $A\hat{O}B$ es rectilíneo y $C\hat{O}B$ y $C\hat{O}A$ forman ángulos rectos (definición de ángulo recto). Concluimos entonces que $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (definición de rectas perpendiculares).

Observemos que si ℓ_1 y ℓ_2 son perpendiculares, ellas se cortan en un punto (son incidentes).

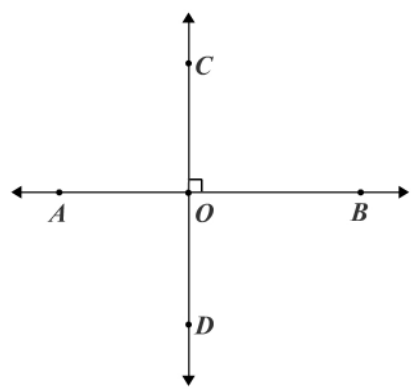


Figura 9.22

Definición 9.3.9: Mediatriz de un segmento

Se llama *mediatriz* de un segmento a la recta que es perpendicular al segmento en el punto medio de éste (figura 9.23).

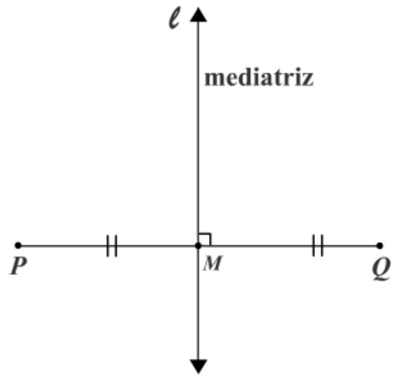


Figura 9.23

ℓ es mediatriz de $\overline{PQ}$ si y sólo si $\ell \perp \overline{PQ}$ y $\overline{PM} \cong \overline{MQ}$.

Ejercicios
Módulo 9

1. De acuerdo con la figura 1, determine los puntos que están:
   a. En el interior del $A\hat{B}C$.
   b. En el $A\hat{B}C$.
   c. En el exterior del $A\hat{B}C$.

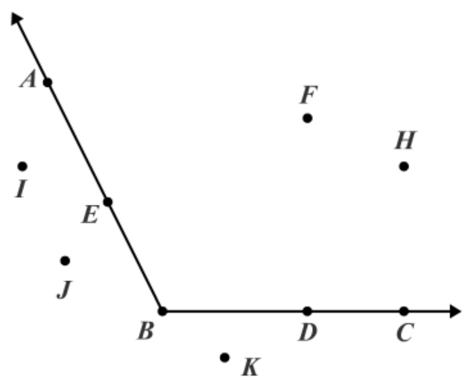


Figura 1

2. ¿El vértice de un ángulo está en el interior? ¿En el ángulo? Explique.

3. ¿Es el ángulo un conjunto convexo? Explique.

Complete cada una de las siguientes afirmaciones (4 a 12):

4. Un ángulo con medida menor que 90º es ________________________________

5. Si un $A\hat{B}C$ es recto, entonces $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ son ____________________________

6. Ángulos coincidentes son ____

7. Ángulos con la misma medida son ____________________________________

8. Un ángulo con medida mayor que 90º es ________________________________

9. El suplemento de un ángulo recto es __________________________________

10. Complementos de ángulos congruentes son _____________________________

11. Los ángulos que forman un par lineal son ______________________________

12. El suplemento de un ángulo agudo es _________________________________

13. Determine el suplemento de cada uno de los siguientes ángulos:

a. 80º b. 100º c. nº d. 90 e. $180° - n°$

14. Dos rectas AB y CD se cortan en O. Si $m(A\hat{O}D) = 50°$, halle la medida de los otros ángulos.

15. Dos ángulos son complementarios y uno de ellos excede al otro en 20º. ¿Cuánto mide cada uno?

16. Halle la medida de dos ángulos que son suplementarios y opuestos por el vértice.

17. Halle la medida de dos ángulos si son suplementarios y la medida del mayor es el doble de la medida del menor.

18. Halle la medida de dos ángulos suplementarios si la medida del mayor es 20º menor que tres veces la medida del menor.

19. Demuestre el teorema 9.2.3.

20. Demuestre el teorema 9.2.5.

21. Demuestre el teorema 9.3.1.

22. Demuestre el teorema 9.3.2.

23. Demuestre el teorema 9.3.4.

24. Demuestre el teorema 9.3.5.

Módulo 10

Polígonos

Contenidos del módulo

10.1 Polígonos - Círculo

Objetivos del módulo

1. Identificar las clases de líneas.
2. Determinar los elementos de un polígono.
3. Clasificar los polígonos.
4. Expresar los nombres de los polígonos.
5. Establecer la diferencia entre circunferencia y círculo.
6. Distinguir los elementos en la circunferencia y el círculo.
7. Diferenciar las dimensiones de los subconjuntos del espacio.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es una línea quebrada, abierta, cerrada, convexa, no convexa?
2. ¿Qué es una línea poligonal?
3. ¿Qué es un polígono?
4. ¿Cuáles son los elementos de un polígono?
5. ¿Cómo se clasifican los polígonos?
6. ¿Cómo se llaman los polígonos?
7. ¿Qué es una línea curva, cerrada, abierta?
8. ¿Qué es una circunferencia? ¿Qué es un círculo?
9. ¿Qué son figuras unidimensionales, bidimensionales, tridimensionales?

Introducción

En este módulo se estudian las generalidades que presentan los polígonos y la circunferencia como figuras básicas en la geometría y de cuyas propiedades nos ocupamos más adelante.

Arquímedes

(287-212 a.C.). Matemático griego nacido y muerto en Siracusa.

Vea el módulo 10 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

10.1 Polígonos - Círculo

Hemos estudiado la línea recta y sus propiedades. Veamos ahora otros tipos de "líneas" y las figuras geométricas que pueden formar.

Definición 10.1.1

Sean $A_1, A_2, \cdots, A_n$ n puntos en el plano; la unión de los segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \cdots, \overline{A_{n-1}A_n}$ se llama línea *quebrada* (figura 10.1).

La línea quebrada es *abierta* si A_1 y A_n no están unidos, y es *cerrada* si A_1 y A_n están unidos.

Definición 10.1.2

Una línea quebrada es *convexa* si una línea recta cualquiera la corta a lo sumo en dos puntos. En caso contrario se dice que es *no convexa* (figura 10.1).

Definición 10.1.3

Una línea quebrada cerrada convexa se llama *línea poligonal* (figura 10.1).

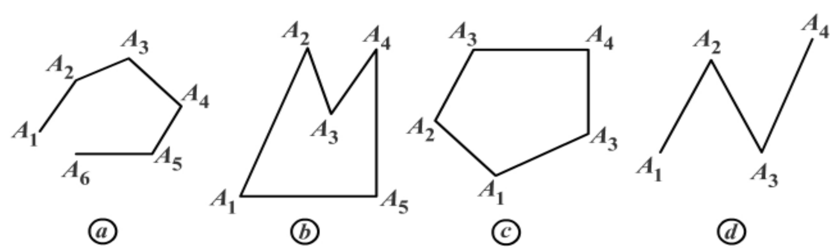


Figura 10.1

a. Línea quebrada abierta convexa.
b. Línea quebrada cerrada.
c. Línea quebrada cerrada convexa o también línea poligonal.
d. Línea quebrada abierta no convexa.

Definición 10.1.4

El conjunto de puntos del plano (o porción del plano) limitado por una línea poligonal se llama *polígono* (figura 10.1).

Los puntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ se llaman vértices del polígono. Los segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}, \cdots,$ $\overline{A_nA}$ son los *lados* del polígono.

Los ángulos $A_1\widehat{A_2}A_3, A_2\widehat{A_3}A_4, \cdots, A_n\widehat{A_1}A_2$ se llaman ángulos interiores del polígono.

Se llama *perímetro* del polígono a la suma de las medidas de los lados; lo denotamos por $2p$ y tenemos:

$$2p = A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_nA_1$$

Se llama *diagonal* de un polígono al segmento de recta que une dos vértices no consecutivos. Ejemplo: $\overline{A_1A_3}, \overline{A_2A_4}$, etc. (figura 10.1*c*).

Un punto P está en el interior de un polígono si cualquier rayo de origen P corta a la línea poligonal. Los puntos que no son interiores del polígono ni están en la línea poligonal constituyen el exterior del polígono (figura 10.2).

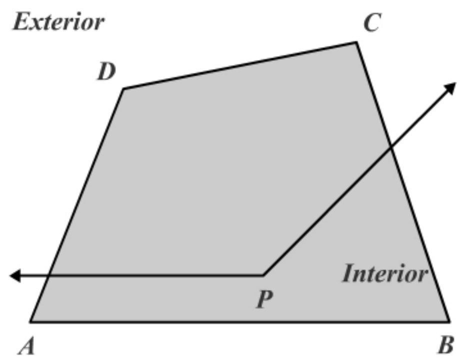


Figura 10.2

Definición 10.1.5

La línea poligonal unida a sus puntos interiores se llama *región poligonal*. Un polígono se representa por la línea poligonal y se nombra con las letras de los vértices consecutivos: $A_1A_2 \cdots A_n$.

Definición 10.1.6

Un polígono es *equilátero* si y sólo si tiene todos sus lados congruentes.

Un polígono es *equiángulo* si y sólo si todos sus ángulos son congruentes.

Definición 10.1.7

Un polígono es *regular* si y sólo si es equilátero y equiángulo. En caso contrario se dice que es *irregular*.

Los polígonos reciben nombres de acuerdo a su número de lados, así (tabla 10.1):

Arquímedes

Las ideas de Arquímedes están reflejadas en una de las proposiciones iniciales de su obra *Sobre los cuerpos flotantes*, pionera de la hidrostática; corresponde al famoso principio que lleva su nombre y, como allí se explica, haciendo uso de él es posible calcular la ley de una aleación.

Una de las obras más importantes de Arquímedes es *Equilibrios planos*, en el que fundamentó la ley de la palanca deduciéndola a partir de un número reducido de postulados y determinó el centro de gravedad de paralelogramos, triángulos, trapecios y el de un segmento de parábola. En la obra *Sobre la esfera y el cilindro* utilizó el método denominado de exhaustión, precedente del cálculo integral, para determinar la superficie de una esfera y para establecer la relación entre una esfera y el cilindro circunscrito en ella.

Arquímedes además es famoso por aplicar la ciencia a la vida diaria. Por ejemplo, descubrió el principio que lleva su nombre mientras se bañaba. También desarrolló máquinas sencillas como la palanca o el tornillo y las aplicó a usos militares y de irrigación.

Tabla 10.1. Nombres de los polígonos según el número de lados que tengan

Número de lados	***Nombre***	***Número***	***Nombre***
3	Triángulo	8	Octágono
4	Cuadrilátero	9	Nonágono
5	Pentágono	10	Decágono
6	Hexágono	11	Ondecágono
7	Heptágono	12	Dodecágono

En general, *n*-ágono es un polígono de *n* lados.

En la figura 10.3 se muestran algunas situaciones características de los polígonos.

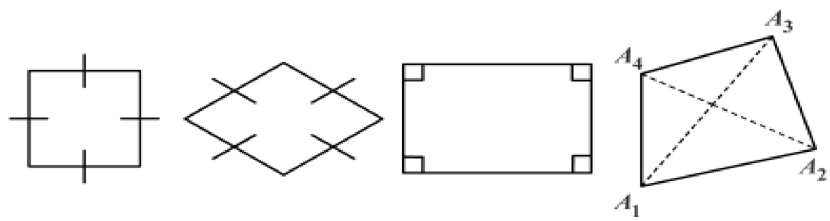


Figura 10.3

Teorema 10.1.1

El número de diagonales de un polígono de *n* lados es $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Definición 10.1.8: Línea curva

Se llama *línea curva* a una línea que no tiene segmentos rectilíneos. Una línea curva puede ser abierta o cerrada, convexa o no convexa. En la figura 10.4 se muestran algunas líneas curvas.

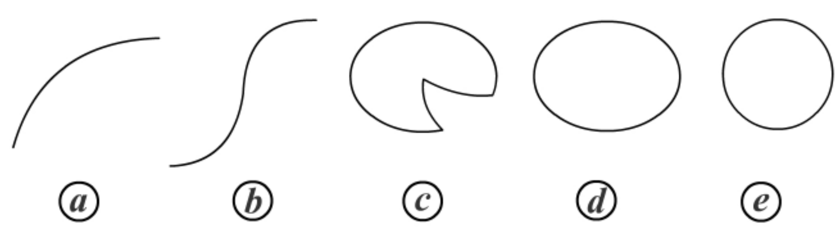


Figura 10.4

a. Línea curva abierta convexa.
b. Línea curva abierta no convexa.
c. Línea curva cerrada no convexa.
d. y e. Líneas curvas cerradas convexas.

Definición 10.1.9

Una línea curva cerrada convexa cuyos puntos están a igual distancia de un punto fijo del plano se llama *circunferencia*, de centro el punto fijo y de radio la distancia (figura 10.5).

Una circunferencia de centro O y radio r se denota $C(O,r)$, o circunferencia de centro O.

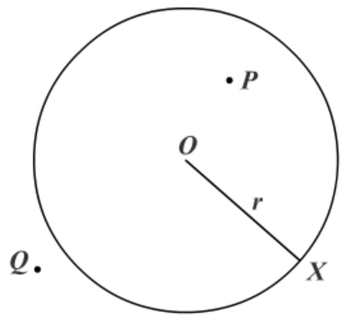


Figura 10.5

También se usa $O(X)$: circunferencia de centro O y que pasa por el punto X.

El segmento que une el centro con un punto de la circunferencia se llama segmento radial OX. La medida del segmento radial se llama radio: $m(\overline{OX}) = r$. Un punto P pertenece al interior de una circunferencia $C(O,r)$ si y sólo si $d\left(O,P\right) < r$ (figura 10.5). Un punto Q pertenece al exterior de una circunferencia $C(O,r)$ si y sólo si $d(O,Q) > r$ (figura 10.5).

Definición 10.1.10

El conjunto de puntos del plano limitado por una circunferencia de centro O y radio r se llama *círculo* de centro O y radio r y se denota $\overline{C}(O,r)$ (figura 10.6).

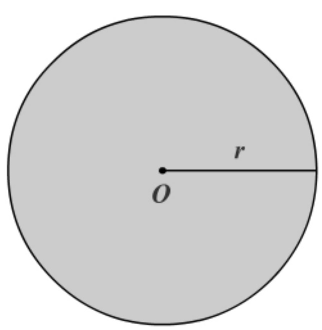


Figura 10.6

Vemos entonces que: $\overline{C}(O,r) = C(O,r) \cup$ interior $C(O,r)$.

Sean los puntos *A, B, C, D* sobre la circunferencia de centro *O*.

Cuerda: es el segmento de recta que une dos puntos distintos de la circunferencia. $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas en la figura 10.7.

Cuerda diametral: es una cuerda que pasa por el centro; su medida se llama diámetro. En la figura 10.7, $\overline{CD}$ es cuerda diametral y $m(\overline{CD}) = d = 2r$.

Arco de circunferencia: es el conjunto de puntos formado por *A* y *B* y los puntos de la circunferencia entre *A* y *B*. Se denota $\overset{\frown}{AB}$ (figura 10.7). Si los extremos del arco son los extremos de una cuerda diametral entonces el arco se llama semicircunferencia ($\overset{\frown}{CD}$ en la figura 10.7).

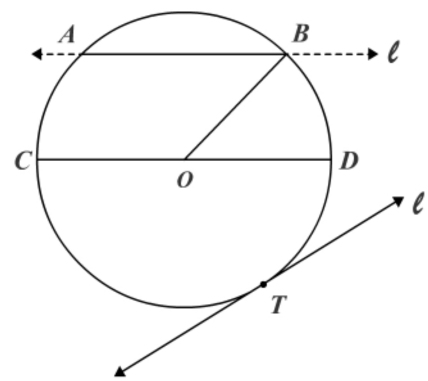


Figura 10.7

En la figura 10.7 $\overset{\frown}{AB}$ es un arco menor y $\overset{\frown}{ACB}$ es un arco mayor.

El ángulo cuyo vértice coincide con el centro *O* y sus lados están sobre los segmentos radiales se llama ángulo central ($B\hat{O}D$ en la figura 10.7).

Una recta ℓ en el mismo plano de una circunferencia *O* es *tangente* a la circunferencia si y sólo si la interseca en un punto. El punto se llama punto de tangencia y se dice que la circunferencia y la recta son tangentes en un punto (figura 10.7). Una recta ℓ es *secante* a una circunferencia si y sólo si la interseca en dos puntos. $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ en la figura 10.7 son rectas secantes a la circunferencia.

Dos circunferencias son iguales si y sólo si coinciden en todos sus puntos. Dos circunferencias son congruentes si y sólo si tienen radios iguales.

Las circunferencias son concéntricas si y sólo si tienen el mismo centro y diferentes radios.

Una circunferencia está *inscrita* en un polígono si y sólo si los lados del polígono son tangentes a la circunferencia; esto equivale a decir que el polígono está circunscrito a la circunferencia. Una circunferencia está *circunscrita* a un polígono si y sólo si los vértices del polígono están en la circunferencia. Lo anterior es equivalente a afirmar que el polígono está inscrito en la circunferencia.

En la figura 10.8*a* tenemos un polígono inscrito en un círculo o una circunferencia circunscrita al polígono, y en la figura 10.8*b* una circunferencia inscrita en un polígono o un polígono circunscrito a una circunferencia.

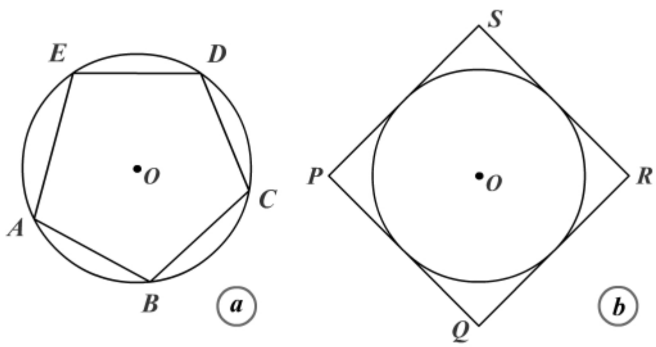


Figura 10.8

Nota: los subconjuntos del espacio se llaman figuras y éstas pueden ser:

a. Unidimensional o lineal: como la línea recta, la línea quebrada, la línea poligonal, la línea curva.
b. Bidimensional plana: si y sólo si no está situada en una línea pero sí en un mismo plano; como una región poligonal, un círculo o una región circular.
c. Tridimensional o espacial: si y sólo si no está situada en un mismo plano; como un cono, un cilindro, una esfera, una pirámide.

Ejercicios
Módulo 10

1. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa.

   - La circunferencia es convexa.
   - El círculo es convexo.
   - El radio pertenece a la circunferencia.
   - El segmento radial pertenece al círculo.
   - Toda recta secante determina una cuerda.
   - Toda cuerda pertenece a la circunferencia.
   - Una cuerda es la unión de dos segmentos radiales.
   - Toda circunferencia contiene al menos dos arcos diferentes.
   - El radio pertenece al círculo.
   - Todo segmento diametral es una cuerda.
   - Algunos segmentos radiales son cuerdas.
   - Una recta puede intersecar a un círculo en más de dos puntos.
   - La intersección de una circunferencia y cualquier cuerda es el conjunto vacío.
   - La intersección de una recta y una circunferencia puede ser un conjunto de tres puntos.
   - La intersección de dos cuerdas diametrales y una circunferencia de un mismo círculo es un conjunto de cuatro puntos.

Sean una circunferencia $C(O,r)$, una recta ℓ en el mismo plano y d la distancia del centro a la recta ℓ. Complete las siguientes proposiciones (2 a 5) de acuerdo con el enunciado anterior.

2. Si $d > r$, entonces la recta es __________________ a la circunferencia.

3. Si $d < r$, entonces la recta es __________________ a la circunferencia.

4. Si $d = 0$, entonces la recta contiene una ______________________ de la circunferencia.

5. Demuestre el teorema 10.1.1

Autoevaluación

Capítulo 2

Elementos básicos de la geometría

Módulos 7 al 10

1. Determine si cada enunciado es verdadero o falso.

- Un punto puede ser la intersección de varios planos.
- Dados dos puntos diferentes, hay más de una recta que los contiene.
- Dos rectas diferentes son coplanares.
- Toda recta tiene un único punto medio.
- Cuatro puntos son coplanares.
- El plano contiene al menos dos puntos.
- Si $p \in$ semiplano α, y $Q \in$ semiplano α, entonces $\overline{PQ} \subset \alpha$.
- Si $\overline{AB} \cap \ell = \phi$, entonces A y B se encuentran en regiones opuestas de ℓ.
- Los ángulos opuestos por el vértice son suplementarios.
- Un par lineal está formado por ángulos adyacentes.
- Dos ángulos adyacentes forman un par lineal.
- Dos ángulos suplementarios forman una par lineal.
- Los ángulos de un par lineal son suplementarios.
- El ángulo es un conjunto convexo.
- La región angular es un conjunto convexo.
- Los ángulos de un polígono son subconjuntos del polígono.
- El interior de un polígono pertenece al polígono.

- Los ángulos complementarios son agudos.
- Si dos rectas son perpendiculares, se forman cuatro ángulos rectos.
- Dos rectas perpendiculares son incidentes.

Complete las preguntas 2 a 9:

2. Un ángulo ___________ es mayor que su suplemento.
3. Si la suma de las medidas de dos ángulos es _____, los ángulos son _______________.
4. La _________ de un ángulo lo divide en dos ángulos.
5. La _________ de un ángulo lo divide __________ en dos segmentos.
6. La diferencia entre las medidas del suplemento y el complemento de un ángulo siempre es ___________________.
7. La suma de las medidas de los ángulos adyacentes consecutivos con el mismo vértice es _____________________.
8. El ángulo cuya medida siempre es igual a la del suplemento es un ángulo ____________.
9. El único punto de la recta que equidista de dos de sus puntos es el punto ___________ del segmento con estos puntos como sus extremos.

En los ejercicios 10 al 15 halle la medida de cada uno de los ángulos que cumplen las condiciones dadas.

10. Los ángulos son suplementarios y uno de ellos es tres veces el otro.
11. Los ángulos son suplementarios y uno de ellos excede en 20º al cuádruplo del otro.
12. Los ángulos son complementarios y la medida del menor es 40º menor que la medida del mayor.
13. Los ángulos son complementarios y la medida del mayor es 28º mayor que la medida del menor.
14. Dé un ángulo si cuatro veces su medida es igual a cinco veces su suplemento.
15. En la figura 1 $\overrightarrow{OB}$ es bisectriz de $A\hat{O}C$ y $\overrightarrow{OD}$ es bisectriz de $E\hat{O}C$. $m(A\hat{O}C) = 50°$, $m(C\hat{O}E) = 80°$. Halle:

    a. $m(A\hat{O}B)$ b. $m(B\hat{O}D)$

    c. $m(C\hat{O}D)$ d. $m(A\hat{O}E)$

    e. $m(B\hat{O}E)$ f. $m(D\hat{O}A)$

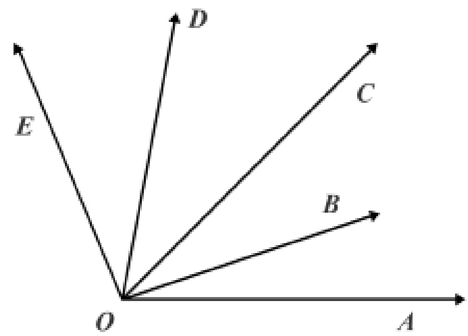


Figura 1

16. En la figura 2 las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{EF}$ se cortan en el punto O y $A\hat{O}E \cong D\hat{O}F$.

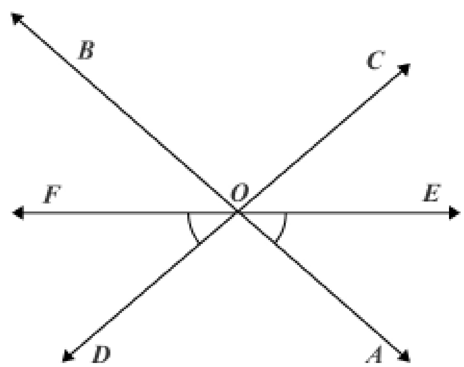


Figura 2

Demuestre que $\overrightarrow{OE}$ es bisectriz de $A\hat{O}C$.

17. En la figura 3:

Hipótesis: $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{QS}$, $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OR}$.

Tesis: $N\hat{O}P \cong Q\hat{O}R$, $N\hat{O}R \cong M\hat{O}P$.

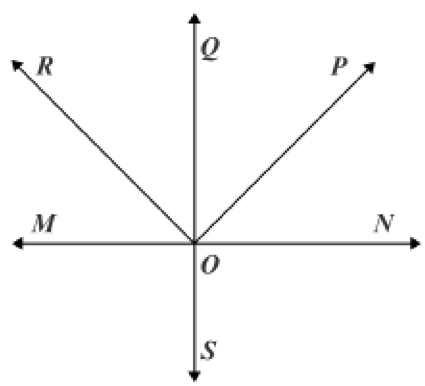


Figura 3

18. En la figura 4:

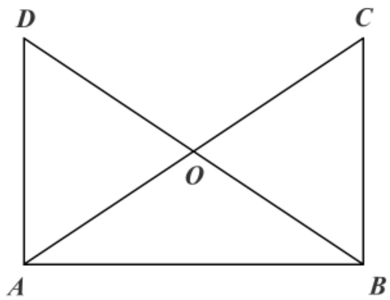


Figura 4

Hipótesis: $\overline{AD} \perp \overline{AB}$, $\overline{BC} \perp \overline{AB}$, $A-O-C$, $B-O-D$, $\hat{D} \cong \hat{C}$.

Tesis: $D\hat{A}O \cong C\hat{B}O$.

Demuestre cada una de las siguientes proposiciones (19 a 22):

19. Las bisectrices de los ángulos de un par lineal son perpendiculares.

20. Las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice están sobre la misma recta.

21. El teorema 9.3.5.

22. Las bisectrices de los ángulos formados por dos rectas incidentes son perpendiculares.

23. En la figura 5:

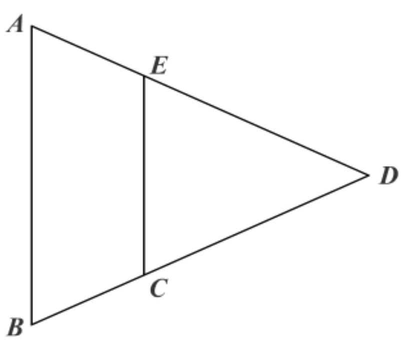


Figura 5

a. Hipótesis: $\overline{AD} \cong \overline{BD}$, $\overline{AE} \cong \overline{BC}$.

Tesis: $\overline{DC} \cong \overline{DE}$.

b. Hipótesis: $\overline{AE} \cong \overline{BC}$, $\overline{DE} \cong \overline{CD}$.

Tesis: $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.

c. Hipótesis: $\overline{ED} \cong \overline{CD}$, $\overline{AE} \cong \overline{ED}$, $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.

Tesis: $\overline{AE} \cong \overline{BC}$.

24. En la figura 6:

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ en O, $B\hat{O}E \cong D\hat{O}F$.

Tesis: $\overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{OE}$.

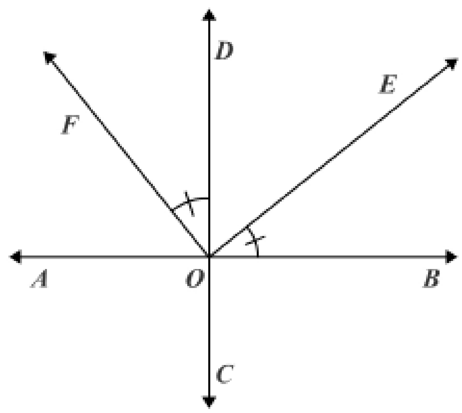


Figura 6

25. En la figura 7:

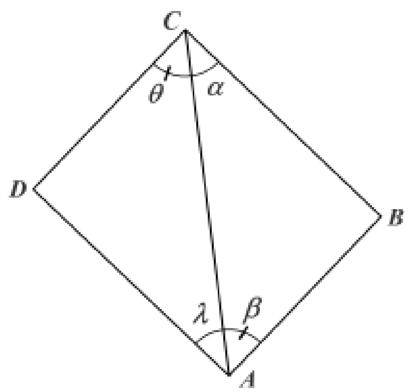


Figura 7

Hipótesis: $\overline{AD} \perp \overline{AB}$, $\overline{CD} \perp \overline{CB}$, $\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$.

Tesis: $\hat{\theta} \cong \hat{\lambda}$.

26. Los puntos A, B, C, D son colineales en ese orden. E es exterior a la recta AD de tal manera que $m(E\hat{B}A) + m(E\hat{C}B) = 180°$.

Demuestre que $E\hat{B}C \cong E\hat{C}B$.

27. Los puntos A, B, C, D son colineales en ese orden. O es el punto medio de $\overline{AD}$ y de $\overline{BC}$. Demuestre que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

28. Los puntos O, A, B son colineales. X es punto medio de $\overline{AB}$. Demuestre que:

a. $OX = (OA + OB)/2$ si $O - A - B$.

b. $OX = (OB - OA)/2$ si $A - O - B$.

29. A, B, C, D son colineales en ese orden. Si $2BC = CD$, demuestre que $AC = (2AB + AD)/3$.

Autoevaluación

30. A, B, C, D son colineales en ese orden. Si $\dfrac{BD}{m}=\dfrac{CD}{n}$, demuestre que $\dfrac{nAB-mAC}{n-m}=AD$.

31. $A\hat{O}B$ y $B\hat{O}C$ son dos ángulos adyacentes tales que $m(A\hat{O}C)-m(A\hat{O}B)=90°$, $\overrightarrow{OX}$ es la bisectriz de $A\hat{O}B$ y $\overrightarrow{OY}$ es la bisectriz de $A\hat{O}C$. Halle $m(X\hat{O}Y)$.

32. Cuatro semirrectas coplanares consecutivas OA, OB, OC y OD forman ángulos tales que $D\hat{O}A \cong C\hat{O}B$, $m(C\hat{O}B)=2m(A\hat{O}B)$, $m(C\hat{O}D)=3m(A\hat{O}B)$.

a. Halle $m(A\hat{O}B)$, $m(D\hat{O}A)$, $m(C\hat{O}D)$.

b. Demuestre que las bisectrices de $A\hat{O}B$ y $C\hat{O}D$ están sobre la misma recta.

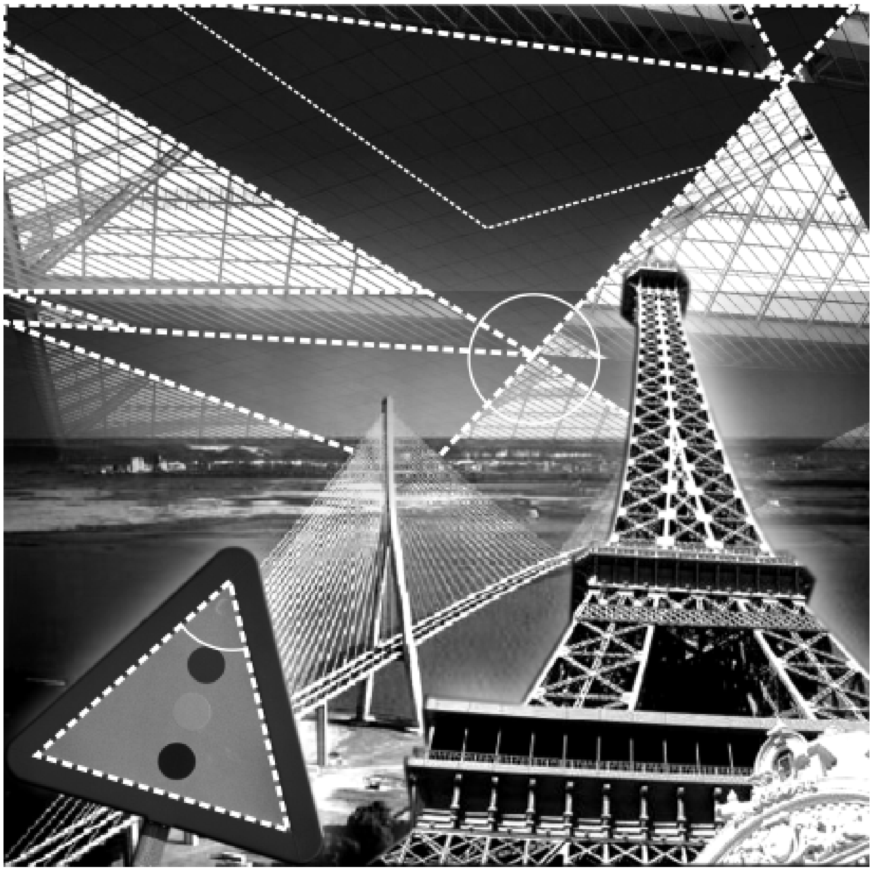
33. Desde un punto O sobre la recta $X'X$ se trazan las semirrectas OA y OB en un mismo semiplano y las bisectrices de los ángulos XOA, AOB, BOX'. Halle las medidas de los ángulos, sabiendo que $m(X'\hat{O}B)=m(X\hat{O}A)$ y que las bisectrices de los ángulos extremos forman un ángulo de medida 100º.

34. $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son semirrectas opuestas. Los puntos E, F, H están en el mismo semiplano de borde $\overleftrightarrow{AB}$. Los puntos E y H están en semiplanos opuestos respecto a $\overrightarrow{BF}$. Los puntos A y H están en igual semiplano respecto a $\overleftrightarrow{BF}$; $\overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{AC}$; $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{BH}$; $m(F\hat{B}E)=20°$. Dibuje la figura y halle $m(E\hat{B}A)$, $m(F\hat{B}H)$, $m(F\hat{B}C)$.

35. $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ son la bisectrices de dos ángulos agudos adyacentes $A\hat{O}B$ y $B\hat{O}C$, respectivamente, y cuya diferencia de medidas es 40º. $\overrightarrow{OZ}$ es la bisectriz de $X\hat{O}Y$. Calcule el ángulo que hace $\overrightarrow{OZ}$ con:

a. El lado $\overrightarrow{OB}$ común a los ángulos.
b. La bisectriz del ángulo AOC.

36. En un mismo semiplano se dan las semirrectas OA, OB, OC, OD y OE, tales que $E\hat{O}D \cong D\hat{O}A$; $C\hat{O}B \cong B\hat{O}A$; $m(A\hat{O}E)-m(A\hat{O}C)=90°$. Determine de qué ángulos es $\vec{OC}$ bisectriz.



Capítulo 3
Triángulo

Contenido breve

Presentación

En la industria actual las piezas y maquinarias se hacen con producciones en serie, construyendo piezas de igual tamaño y forma, desarrollo que ha sido posible por medio de la congruencia de las figuras geométricas.

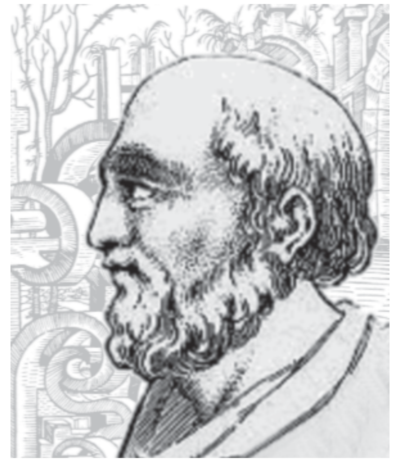
En este capítulo se estudian los diferentes criterios para la congruencia de las distintas clases de triángulos y también la relación entre los elementos de un mismo triángulo. Los módulos correspondientes presentan las generalidades sobre los triángulos y los criterios de congruencia entre ellos, las desigualdades entre segmentos y ángulos y los elementos (lados, ángulos) de un triángulo, de los cuales los más importantes son el ángulo exterior y la desigualdad triangular.

Módulo 11

Congruencia de triángulos

Contenidos del módulo

11.1 Generalidades sobre el triángulo
11.2 Congruencias
11.3 Congruencia de triángulos



Anaxágoras de Clazomenae

(c. 500-c. 428 a.C.). Filósofo, geómetra y astrónomo griego nacido en Clazomenae (actual Turquía) y muerto en Lámpsaco (actual Turquía).

Objetivos del módulo

1. Identificar los elementos de un triángulo.
2. Diferenciar las clases de triángulos.
3. Conocer los segmentos y puntos notables.
4. Definir la congruencia de triángulos.
5. Establecer los criterios de congruencia de triángulos.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es un triángulo?
2. ¿Cómo se denota un triángulo?
3. ¿Cuáles son los elementos de un triángulo?
4. ¿Qué clases de triángulos hay?
5. ¿Cuáles son los segmentos y puntos notables en el triángulo?
6. ¿Qué son figuras geométricas congruentes?
7. ¿Cómo se definen dos triángulos congruentes?
8. ¿Cuáles son los criterios de congruencia de triángulos?

Introducción

Con este módulo se comienza el estudio de la congruencia de triángulos. Se empieza definiendo qué es un triángulo y cuáles son sus elementos. A continuación se clasifican los triángulos de acuerdo a sus lados y a sus ángulos y se definen los segmentos notables (altura, mediana, bisectriz) y los puntos notables (ortocentro, baricentro, incentro y circuncentro). Se termina con el estudio de los diferentes criterios de congruencia de triángulos y se realizan algunos ejemplos de aplicación.

Vea el módulo 11 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

11.1 Generalidades sobre el triángulo

Definición 11.1.1: Triángulo

Un triángulo es un polígono de tres lados (figura 11.1). Se denota por Δ y escribimos ΔABC. Los puntos A, B, C se llaman *vértices* del triángulo.

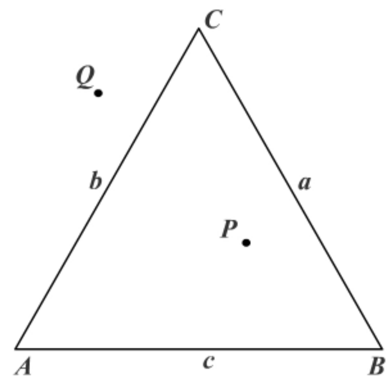


Figura 11.1

Los segmentos *AB, BC, CA* se llaman *lados* del triángulo: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Los ángulos *CAB, CBA, ABC* se llaman *ángulos interiores* del triángulo, o simplemente *ángulos* del triángulo.

Un punto *P* pertenece al interior de un triángulo si y sólo si es un punto de la intersección de los semiplanos: $\overleftrightarrow{CA}(B) \cap \overleftrightarrow{AB}(C) \cap \overleftrightarrow{CB}(A)$. Un triángulo determina tres subconjuntos: los puntos propios del triángulo, los puntos interiores como *P* y los puntos exteriores como *Q*.

Se llama *región triangular* a la unión de los puntos del triángulo y los puntos interiores del mismo. Región triangular: $\Delta ABC \cup$ interior del ΔABC.

El *perímetro* de un triángulo es la suma de las medidas de los lados. Se denota por 2*p*. Luego $2p = AB + BC + CA = a + b + c$.

El conjunto de los triángulos puede clasificarse de acuerdo con los lados del triángulo (figura 11.2).

a. Un *triángulo* es *escaleno* si y sólo si no tiene lados congruentes (figura 11.2*a*).

b. Un *triángulo* es *isósceles* si y sólo si tiene por lo menos dos lados congruentes (figura 11.2*b*). El lado que no es congruente con los otros se llama base del triángulo isósceles y los ángulos adyacentes a la base se llaman ángulos de la base; el ángulo opuesto a la base se llama ángulo del vértice.

c. Un *triángulo* es *equilátero* si y sólo si tiene sus lados congruentes (figura 11.2*c*).

De acuerdo con las definiciones anteriores se tiene que todo triángulo equilátero es isósceles.

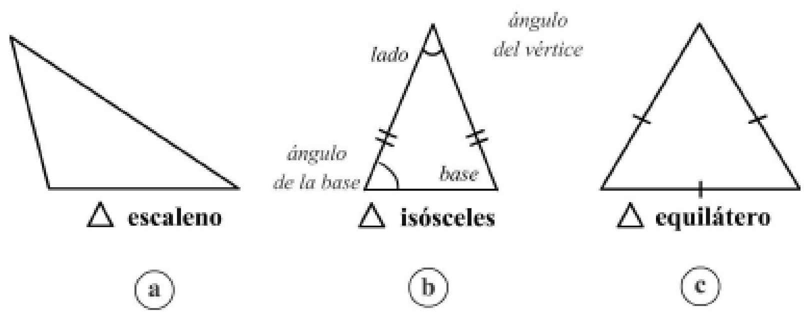


Figura 11.2

El conjunto de los triángulos también puede clasificarse de acuerdo con la clase de ángulos del triángulo (figura 11.3).

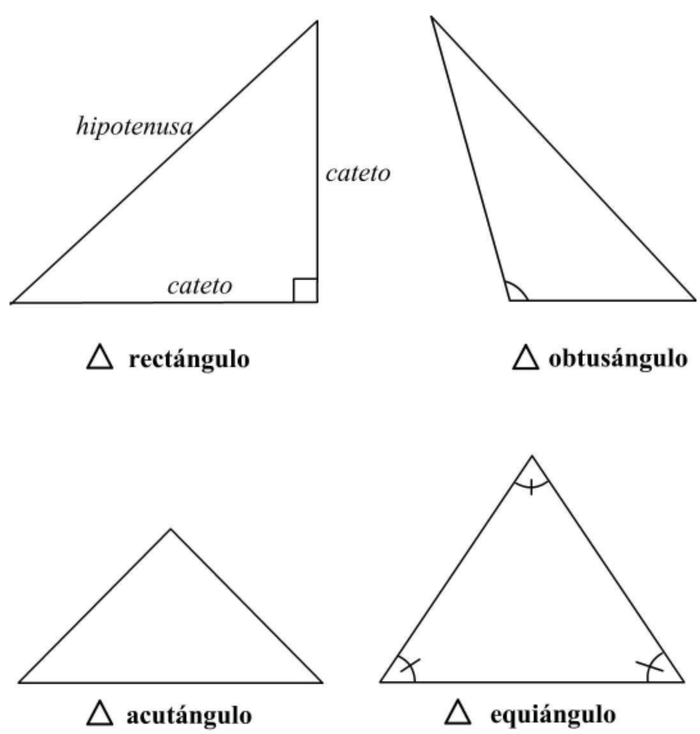


Figura 11.3

Anaxágoras de Clazomenae

Anaxágoras sostenía que toda la materia había existido en su forma primitiva como átomos o moléculas; que estos átomos, numerosos hasta el infinito e infinitamente pequeños, habían existido desde la eternidad; y que el orden que surgió al principio de este infinito caos de átomos diminutos era efecto de una inteligencia eterna. También consideraba que todos los cuerpos son simples conglomerados de átomos.

Anaxágoras dio un gran impulso a la investigación de la naturaleza fundada en la experiencia, la memoria y la técnica. A él se le atribuyen las explicaciones racionales de los eclipses y de la respiración de los peces, como también investigaciones sobre la anatomía del cerebro.

a. Un triángulo es un *triángulo rectángulo* si y sólo si tiene un ángulo recto. El lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los lados adyacentes se llaman catetos (figura 11.3*a*).

b. Un triángulo es un *triángulo obtusángulo* si y sólo si tiene un ángulo obtuso (figura 11.3*b*).

c. Un triángulo es un *triángulo acutángulo* si y sólo si tiene sus ángulos agudos (figura 11.3*c*).

d. Un triángulo es un *triángulo equiángulo* si y sólo si tiene sus ángulos congruentes (figura 11.3*d*).

En los triángulos se consideran otros elementos importantes además de sus lados y ángulos. Ellos son las alturas, bisectrices, medianas y mediatrices, como también los puntos de intersección de ellas.

Definición 11.1.2: Altura

Se llama *altura* de un triángulo al segmento perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación (figura 11.4*a*). El punto de intersección de las alturas se llama *ortocentro* (figura 11.4*b*). El punto de intersección de la altura con el lado o con su prolongación se llama *pie de altura:* H_c, H_a.

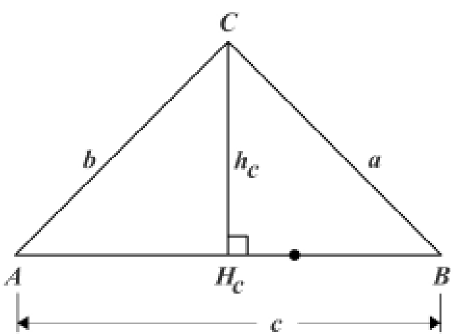


Figura 11.4*a*

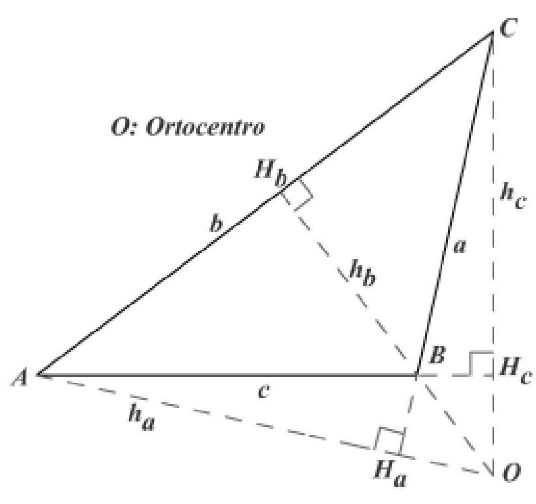


Figura 11.4*b*

Definición 11.1.3: Mediana

Se llama *mediana* de un triángulo al segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto (figura 11.5*a*). El punto de intersección de las medianas se llama *baricentro* (figura 11.5*b*) y es además el centro de gravedad o centroide del triángulo. El punto de intersección de la mediana con el lado se llama *pie de mediana:* M_a.

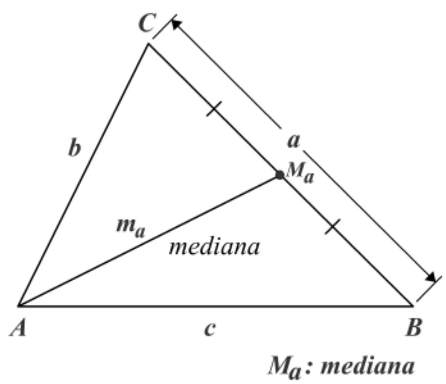


Figura 11.5*a*

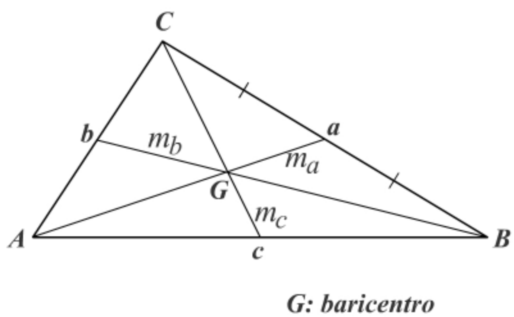


Figura 11.5*b*

Definición 11.1.4: Bisectriz

Se llama *bisectriz* de un triángulo al segmento de bisectriz del ángulo correspondiente, comprendido entre el vértice y el lado opuesto (figura 11.6*a*). El punto de intersección de las bisectrices se llama *incentro* (figura 11.6*b*) y es el centro del círculo inscrito en el triángulo. El punto de intersección de la bisectriz con el lado opuesto se llama *pie de bisectriz:* B_a.

Definición 11.1.5: Mediatriz

Se llama *mediatriz* de un triángulo a la perpendicular levantada a cada lado en su punto medio (figura 11.7*a*). El punto de intersección de las mediatrices se llama *circuncentro* (figura 11.7*b*) y es el centro del círculo circunscrito. El punto medio del lado es el *pie de la mediatriz.*

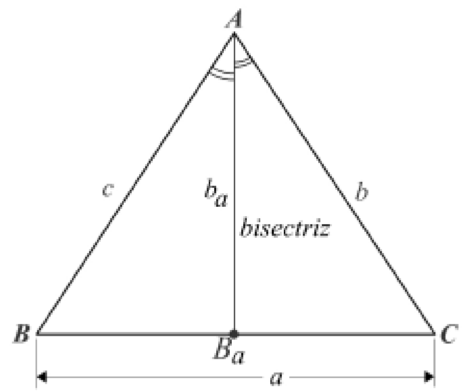


Figura 11.6*a*

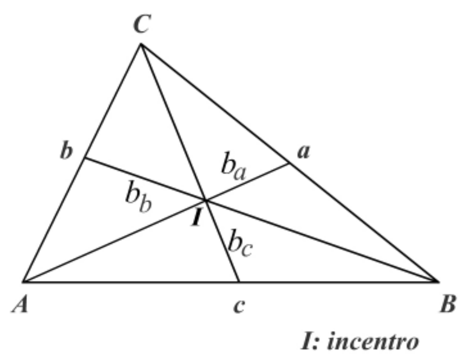


Figura 11.6*b*

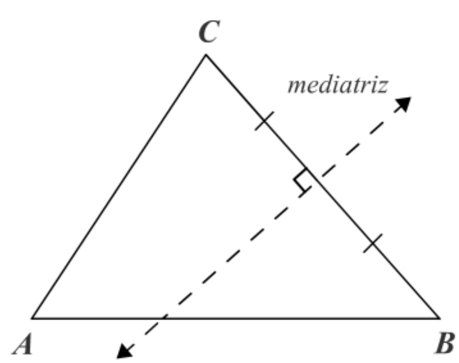


Figura 11.7*a*

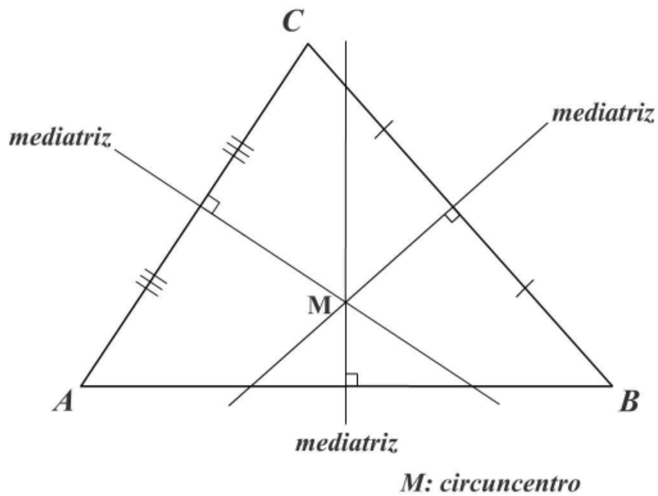


Figura 11.7*b*

Las medianas, bisectrices y alturas del triángulo son segmentos de recta. La mediatriz es una recta.

11.2 Congruencias

En el capítulo anterior se ha definido la congruencia de segmentos y la congruencia de ángulos más como una consecuencia de las propiedades de los reales.

Un ejemplo práctico de la congruencia es la industria actual, la cual se basa en la producción masiva de partes para formar unidades completas. La industria moderna tiene que producir artículos que tengan el mismo tamaño y la misma forma para no sólo ensamblar maquinaria o equipos complejos sino también partes para su reparación.

La congruencia de figuras geométricas se ha definido de muchas maneras diferentes. Algunas de ellas son:

1. De acuerdo con el tamaño y la forma dos figuras geométricas son congruentes si y sólo si tienen el mismo tamaño y la misma forma.

2. También se ha definido la congruencia en forma dinámica diciendo que dos figuras son congruentes si y sólo si pueden hacerse coincidir mediante un movimiento rígido. Un movimiento rígido es el que conserva las distancias; es llamado también isométrico (que conserva las medidas).

3. Dos figuras son congruentes si y sólo si son la misma figura en distintas posiciones.

4. Dos figuras planas son congruentes si y sólo si una copia de una de ellas puede hacerse coincidir con la segunda.

La siguiente definición representa la culminación de más de dos mil años de pensamiento sobre congruencia.

Definición 11.2.1: Congruencia

Sea $X \leftrightarrow X'$ una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos F y F' tal que para toda pareja de puntos $P \leftrightarrow P'$ y $Q \leftrightarrow Q'$ y en correspondencia biunívoca implique siempre que $m(\overline{PQ}) = m(\overline{P'Q'})$. Decimos que los conjuntos F y F' son congruentes (figura 11.8).

Si una figura F es congruente con una figura F', se escribe $F \cong F'$.

La congruencia de figuras geométricas cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva (enunciarlas).

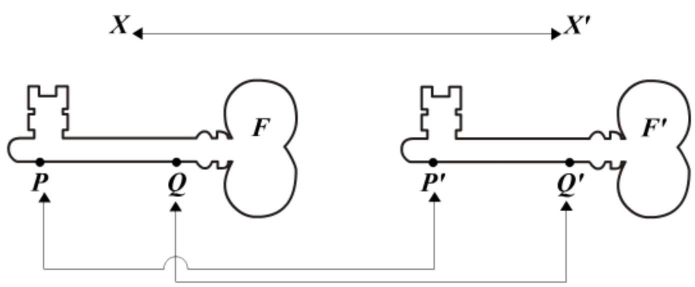


Figura 11.8

11.3 Congruencia de triángulos

Consideremos una correspondencia biunívoca entre dos vértices de dos triángulos ABC y DEF, la cual expresaremos como $ABC \leftrightarrow DEF$.

La correspondencia biunívoca entre los vértices (figura 11.9), $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$, induce a una correspondencia de los lados y los ángulos:

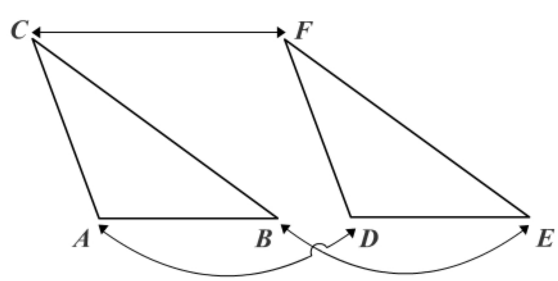


Figura 11.9

$$\hat{A} \leftrightarrow \hat{D} \qquad \overline{AB} \leftrightarrow \overline{DE}$$
$$\hat{B} \leftrightarrow \hat{E} \qquad \overline{BC} \leftrightarrow \overline{EF}$$
$$\hat{C} \leftrightarrow \hat{F} \qquad \overline{AC} \leftrightarrow \overline{DF}$$

Definición 11.3.1: Congruencia de triángulos

Sea $ABC \leftrightarrow DEF$ una correspondencia biunívoca entre los vértices de los triángulos ABC y DEF. Si cada par de ángulos correspondientes son congruentes y cada par de lados correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ es una *congruencia entre los dos triángulos* y se escribe $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. Es decir, la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ es una congruencia entre los dos triángulos ABC y DEF si y sólo si se cumple:

$$\begin{cases} \hat{A} \cong \hat{D} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \end{cases}$$

Recordemos que si dos elementos son congruentes, gráficamente se indica con el mismo símbolo, así: si $A\hat{B}C \cong D\hat{E}F$, entonces en la figura 11.10 se señalan los ángulos con el mismo símbolo.

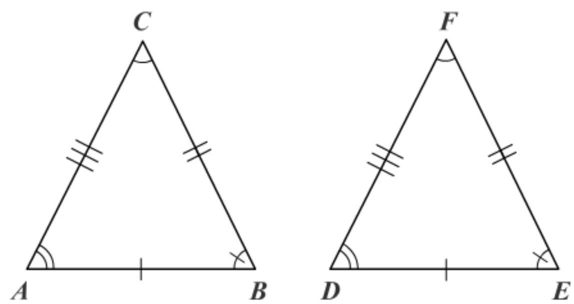


Figura 11.10

La congruencia de triángulos también cumple las propiedades:

1. Reflexiva: $\Delta ABC \cong \Delta ABC$.
2. Simétrica: $\Delta ABC \cong \Delta DEF \Rightarrow \Delta DEF \cong \Delta ABC$.
3. Transitiva: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ y $\Delta DEF \cong \Delta HJK \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta HJK$.

De acuerdo con la definición de congruencia de triángulos necesitamos seis congruencias (tres pares de lados congruentes y tres pares de ángulos congruentes) para determinar si dos triángulos son congruentes o no.

El siguiente postulado establece condiciones mínimas para la congruencia de triángulos y se llama postulado lado-ángulo-lado y se simboliza por L-A-L.

Postulado 11.3.1 L-A-L (De la congruencia de triángulos)
Sea $ABC \leftrightarrow DEF$ una correspondencia biunívoca entre los vértices de los triángulos ABC y DEF. Si dos lados y el ángulo incluido de uno de los triángulos son

respectivamente congruentes a los lados y el ángulo comprendido en el otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes (figura 11.11).

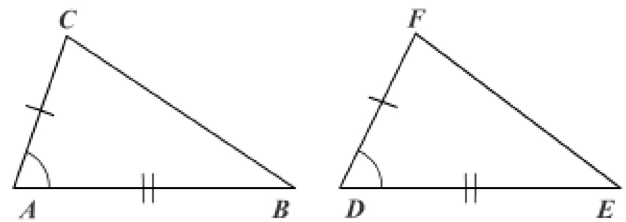


Figura 11.11

El postulado establece que en la figura 11.11, si $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Corolario 11.3.1
Si dos triángulos rectángulos tienen sus catetos respectivamente congruentes, los triángulos son congruentes (figura 11.12).

Este corolario (del postulado L-A-L) se simboliza por C-C en triángulos rectángulos. Su demostración es inmediata ya que el ángulo comprendido siempre es el ángulo recto.

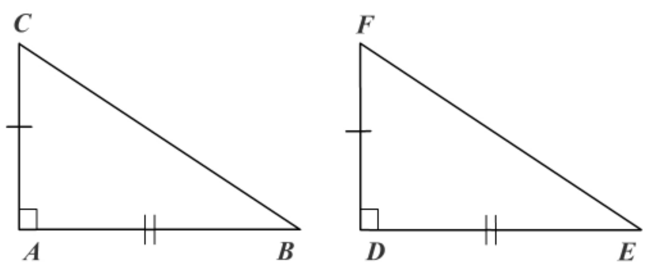


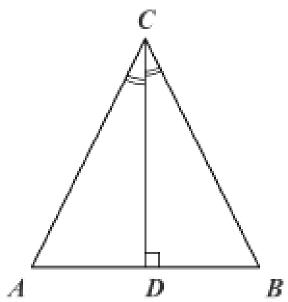
Figura 11.12

En este capítulo las demostraciones se harán siguiendo un listado en el cual en la parte de la izquierda se ponen unas afirmaciones y en la derecha las justificaciones o razones de las afirmaciones hechas.

Teorema 11.3.1

Si dos lados de un triángulo son congruentes, los ángulos opuestos a ellos son congruentes.

Un enunciado equivalente al teorema anterior es: “En todo triángulo isósceles los ángulos de la base son congruentes”.



Hipótesis: ΔABC con $\overline{CA} \cong \overline{CB}$

Tesis: $\hat{A} \cong \hat{B}$

Figura 11.13

Para facilitar la demostración de algunos teoremas y la solución de algunos ejercicios es necesario a veces una(s) construcción(es) auxiliar(es), la cual se hace con trazo discontinuo en la gráfica y está basada generalmente en los postulados.

Demostración

Se traza $\overline{CD}$ bisectriz de $\hat{C}$ con $A-D-B$.

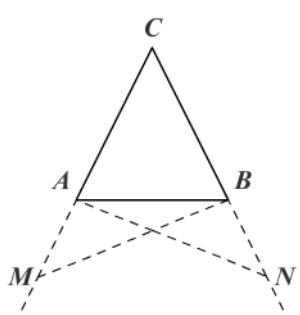
1. ΔABC con $\overline{CA} \cong \overline{CB}$	Hipótesis.
2. $\overline{CD}$ bisectriz de $\hat{C}$	Construcción auxiliar.
3. $A\hat{C}D \cong B\hat{C}D$	De 2. Definición de bisectriz.
4. $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ ($\overline{CD}$ común)	Propiedad reflexiva.
5. $\Delta ACD \cong \Delta BCD$	L-A-L, de 1, 3 y 4.
$\therefore \hat{A} \cong \hat{B}$	Ángulos correspondientes en Δs congruentes.

Corolario 11.3.2
En todo triángulo isósceles la bisectriz del ángulo del vértice es a la vez mediana y altura y está contenida en la mediatriz de la base.

En la figura 11.13, $\overline{CD}$ es mediana y altura y está contenida en la mediatriz a $\overline{AB}$. ¿Por qué?

Corolario 11.3.3
Todo triángulo equilátero es equiángulo.

Nota: Euclides hizo la demostración del teorema 11.3.1 con base en otras construcciones auxiliares apoyadas en los postulados (figura 11.14).



Hipótesis: ΔABC con $\overline{CA} \cong \overline{CB}$

Tesis: $C\hat{A}B \cong C\hat{B}A$

Figura 11.14

Demostración

Construcción auxiliar: sean M y N dos puntos tales que $C-A-M$ y $C-B-N$ (postulado 10) y $\overline{AM} \cong \overline{BN}$ (postulado 8.1.4: construcción de segmentos). Se unen M y B, N y A (postulado 1).

1. $\overline{CA} \cong \overline{CB}$	Hipótesis.
2. $\overline{AM} \cong \overline{BN}$	Construcción auxiliar.
3. $\overline{CM} \cong \overline{CN}$	Adición de segmentos, de 1 y 2.
4. $\hat{C} \cong \hat{C}$	Propiedad reflexiva.
5. $\Delta CBM \cong \Delta CAN$	L-A-L, de 1, 4 y 3.
6. $C\hat{B}M \cong C\hat{A}N$	Ángulos correspondientes en Δs congruentes, de 5.
7. $C\hat{M}B \cong C\hat{N}A$	Razón de 6.
8. $\overline{BM} \cong \overline{AN}$	Lados correspondientes en Δs congruentes, de 5.
9. $\Delta AMB \cong \Delta BNA$	L-A-L, de 2 , 7 y 8.
10. $A\hat{B}M \cong B\hat{A}N$	Ángulos correspondientes en Δs congruentes, de 9.
$\therefore C\hat{A}B \cong C\hat{B}A$	Sustracción de ángulos, de 6 y 10.

Ejemplo 11.3.1

La mediana a la base de un triángulo isósceles es bisectriz y altura (figura 11.15).

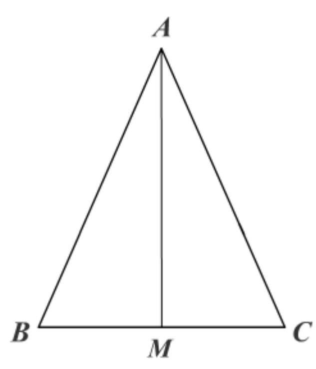


Figura 11.15

Hipótesis: ΔABC isósceles, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

$\overline{AM}$ mediana

Tesis: $\overline{AM}$ bisectriz

$\overline{AM}$ altura

Demostración

1. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Hipótesis.
2. $\overline{BM} \cong \overline{CM}$	M punto medio de $\overline{BC}$.
3. $\hat{B} \cong \hat{C}$	Ángulos de la base del ΔABC.

4. $\Delta ABM \cong \Delta ACM$	L-A-L, de 1, 3 y 2.
5. $B\hat{A}M \cong C\hat{A}M$	De 4. Ángulos correspondientes en Δs congruentes.
$\therefore \overline{AM}$ bisectriz de $\hat{A}$	De 5. Definición de bisectriz.
6. $A\hat{M}B \cong C\hat{M}A$	De 4. Ángulos correspondientes en Δs congruentes.
7. $A\hat{M}B$ y $C\hat{M}A$ son par lineal	$B-M-C$.
8. $A\hat{M}B$ y $C\hat{M}A$ son rectos	De 6 y 7, definición de ángulo recto.
9. $\overline{AM} \perp \overline{BC}$	$A\hat{M}B$ y $C\hat{M}A$ son rectos.
$\therefore \overline{AM}$ es altura	De 9. Definición de altura.

Ejemplo 11.3.2

Las medianas trazadas a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes (figura 11.16).

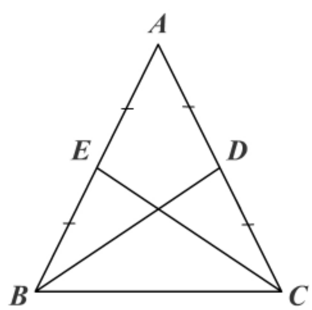


Figura 11.16

Hipótesis: ΔABC isósceles $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

Tesis: $\overline{BD} \cong \overline{CE}$

Demostración

1. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Hipótesis.
2. $\overline{BE} \cong \overline{EA}$	$\overline{CE}$ mediana.
3. $\overline{CD} \cong \overline{DA}$	$\overline{BD}$ mediana.
4. $\overline{BE} \cong \overline{EA} \cong \overline{AD} \cong \overline{DC}$	*E*, *D* puntos medios de segmentos congruentes $\left(\overline{AB} \cong \overline{AC}\right)$.
5. $\hat{A} \cong \hat{A}$	Reflexividad de la congruencia.
6. $\Delta AEC \cong \Delta ADB$	L-A-L, de 1, 5, 4.
$\therefore \overline{EC} \cong \overline{BD}$	De 6. Lados correspondientes en Δs congruentes.

Ejemplo 11.3.3

Si dos triángulos son congruentes, las medianas correspondientes son congruentes (figura 11.17).

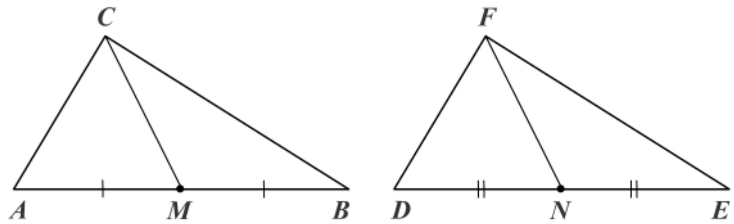


Figura 11.17

Hipótesis: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

$\overline{CM}$ mediana

$\overline{FN}$ mediana

Tesis: $\overline{CM} \cong \overline{FN}$

Demostración

1. $\overline{CA} \cong \overline{FD}$	$\Delta ABC \cong \Delta DEF$.
2. $\hat{A} \cong \hat{D}$	$\Delta ABC \cong \Delta DEF$.
3. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	$\Delta ABC \cong \Delta DEF$.
4. $\overline{AM} \cong \overline{MB}$	$\overline{CM}$ es mediana.
5. $\overline{DN} \cong \overline{NE}$	$\overline{FN}$ es mediana.
6. $\overline{AM} \cong \overline{MB} \cong \overline{DN} \cong \overline{NE}$	*M, N* son puntos medios de segmentos congruentes (3).
7. $\Delta CAM \cong \Delta FDN$	L-A-L, de 1, 2 y 6.
$\therefore \overline{CM} \cong \overline{FN}$	Lados correspondientes en Δs congruentes, de 7.

Teorema 11.3.2: A-L-A

Sea $\Delta ABC \leftrightarrow DEF$ la correspondencia biunívoca entre los vértices de los triángulos *ABC* y *DEF*. Si los ángulos y el lado comprendido entre ellos en uno de los triángulos son respectivamente congruentes a los ángulos y el lado comprendido en el otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes (figura 11.18).

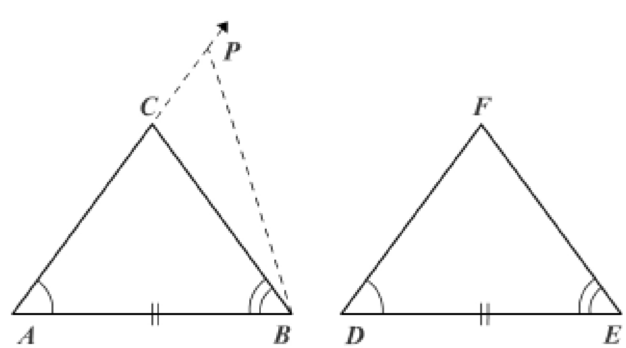


Figura 11.18

Hipótesis: ΔABC y ΔDEF con $\hat{A} \cong \hat{D}$

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$

$\hat{B} \cong \hat{E}$

Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Demostración

La congruencia de dos triángulos sólo podemos demostrarla por medio del postulado L-A-L. Como no lo podemos aplicar debemos entonces recurrir a una demostración por reducción al absurdo, negando la tesis y usando la ley o principio del tercero excluido.

1. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ o bien $\Delta ABC \ncong \Delta DEF$	Ley del 3º excluido.
2. Si $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	La demostración termina porque estamos aceptando que la tesis es verdadera.
3. Supongamos que $\Delta ABC \ncong \Delta DEF$	Suposición temporal.
4. Sea $\overline{AC} \ncong \overline{DF}$	$\Delta ABC \ncong \Delta DEF$.
5. Existe un punto $P \in \overline{AC}$, tal que $\overline{AP} \cong \overline{DF}$	Como $\overline{AC} \ncong \overline{DF}$, supongamos $AC < DF$.
6. $\Delta PAB \cong \Delta FDE$	L-A-L (de 5, $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$).
7. $P\hat{B}A \cong \hat{E}$	De 6. Ángulos correspondientes en Δs congruentes.
8. $\hat{B} \cong \hat{E}$	Hipótesis.
9. $P\hat{B}A \cong \hat{B}$	Transitividad, de 7 y 8.
10. Contradicción	De 9. Contradice el postulado de la construcción de ángulos.
$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	Negación del supuesto 3.

Corolario 11.3.4: C-A

Si dos triángulos rectángulos tienen un cateto y un ángulo agudo respectivamente congruentes, los triángulos son congruentes.

Corolario 11.3.5

En todo triángulo a ángulos congruentes se oponen lados congruentes (figura 11.19).

Hipótesis: ΔABC con $A\hat{B}C \cong A\hat{C}B$

Tesis: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

Construcción auxiliar

Prolongamos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ hasta M y N de tal manera que $\overline{BM} \cong \overline{CN}$ y trazamos $\overline{BN}$ y $\overline{MC}$.

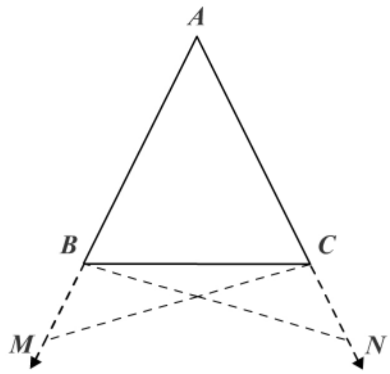


Figura 11.19

Demostración

1. $C\hat{B}M \cong B\hat{C}N$	Son suplementos de $A\hat{B}C \cong A\hat{C}B$.
2. $\Delta CBM \cong \Delta BCN$	L-A-L ($\overline{BC}$ común, $C\hat{B}M \cong B\hat{C}N$, $\overline{BM} \cong \overline{CN}$) .
3. $B\hat{C}M \cong N\hat{B}C$	De 2. Ángulos correspondientes en Δs congruentes.
4. $\hat{M} \cong \hat{N}$	Razón de 3.
5. $A\hat{B}N \cong A\hat{C}M$	Adición de ángulos (hipótesis, 3).
6. $\overline{MC} \cong \overline{NB}$	De 2. Lados correspondientes en Δs congruentes.
7. $\Delta ACM \cong \Delta ABN$	A-L-A, de 4, 5, 6.
$\therefore\ \overline{AC} \cong \overline{AB}$	De 7. Lados correspondientes en Δs congruentes.

Corolario 11.3.6
Si un triángulo tiene dos ángulos congruentes, es un triángulo isósceles.

Corolario 11.3.7
Todo triángulo equiángulo es equilátero.

Teorema 11.3.3: L-L-L

Sea $ABC \leftrightarrow DEF$ la correspondencia biunívoca entre los vértices de los triángulos *ABC* y *DEF*. Si los lados de uno de ellos son congruentes con los correspondientes del otro, entonces los triángulos son congruentes (figura 11.20).

Hipótesis: sea $ABC \leftrightarrow DEF$ tal que: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

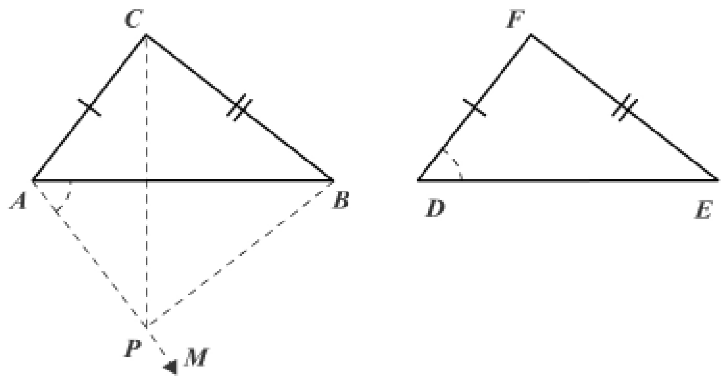


Figura 11.20

Demostración
Para apoyarnos en el postulado L-A-L, necesitamos un ángulo que no nos suministra la hipótesis. Recurrimos a la construcción auxiliar de dicho ángulo.

1. Existe $\overrightarrow{AM}$ tal que: $B\hat{A}M \cong F\hat{D}E$	Postulado de la construcción de ángulos.
2. Existe $P \in \overrightarrow{AM}$ tal que $\overline{AP} \cong \overline{DF}$	Postulado de la construcción de segmentos.
3. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	Hipótesis.
4. $\Delta ABP \cong \Delta DEF$	L-A-L, de 1, 2, 3.
5. $\overline{PB} \cong \overline{EF}$	De 4. Lados correspondientes en Δs congruentes.
6. $\overline{EF} \cong \overline{BC}$	Hipótesis.
7. $\overline{PB} \cong \overline{EF}$	De 5 y 6. Transitividad.
8. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	Hipótesis.
9. $\overline{AC} \cong \overline{AP}$	De 2 y 8. Transitividad.
10. $A\hat{C}P \cong A\hat{P}C$	De 9. Teorema 11.3.1
11. $B\hat{C}P \cong B\hat{P}C$	De 7. Teorema 11.3.1
12. $A\hat{C}B \cong A\hat{P}B$	De 10, 11. Adición de ángulos.
13. $\Delta ABC \cong \Delta ABP$	L-A-L, de 9, 12 y $\overline{AB} \cong \overline{AB}$.
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$	De 4 y 13. Transitividad.

Nota: el teorema también es válido para triángulos obtusángulos y triángulos rectángulos.

Ejemplo 11.3.4 (figura 11.21)

En la figura adjunta se tiene:

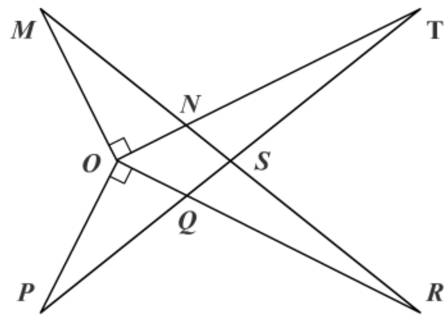


Figura 11.21

Hipótesis: $\overline{OM} \perp \overline{OT}$, $\overline{OP} \perp \overline{OR}$
$O-N-T$; $O-Q-R$;
$M-N-S-R$;
$P-Q-S-T$
$\overline{OM} \cong \overline{OP}$
$\hat{M} \cong \hat{P}$

Tesis: $\hat{T} \cong \hat{R}$
$\Delta NST \cong \Delta QSR$

Demostración

1. $M\hat{O}N$, $P\hat{O}Q$ son rectos	$\overline{OM} \perp \overline{OT}$, $\overline{OP} \perp \overline{OR}$.
2. $\overline{OM} \cong \overline{OP}$	Hipótesis.
3. $\hat{M} \cong \hat{P}$	Hipótesis.
4. $N\hat{O}Q \cong N\hat{O}Q$ (común)	Reflexividad.
5. $M\hat{O}R \cong P\hat{O}T$	De 1 y 4. Adición de ángulos.
6. $\Delta MOR \cong \Delta POT$	A-L-A, de 2, 3 y 5.
7. $\therefore \hat{R} \cong \hat{T}$	Ángulos correspondientes en Δs congruentes, de 6.
8. $\overline{OT} \cong \overline{OR}$	Lados correspondientes en Δs congruentes, de 6.
9. $\Delta MON \cong \Delta POQ$	C-A, de 1, 2, 3.
10. $\overline{ON} \cong \overline{OQ}$	Lados correspondientes en Δs congruentes, de 9.
11. $\overline{NT} \cong \overline{QR}$	Sustracción de segmentos, de 8 y 10.
12. $M\hat{N}O \cong P\hat{Q}O$	Ángulos correspondientes en Δs congruentes, de 9.
13. $O\hat{N}S \cong O\hat{Q}S$	Suplementos de ángulos congruentes, de 12.
14. $T\hat{N}S \cong R\hat{Q}S$	Suplementos de ángulos congruentes, de 13
$\therefore \Delta NST \cong \Delta QSR$	A-L-A, de 7, 11, 14.

Ejemplo 11.3.5 (figura 11.22)

En la figura adjunta se tiene:

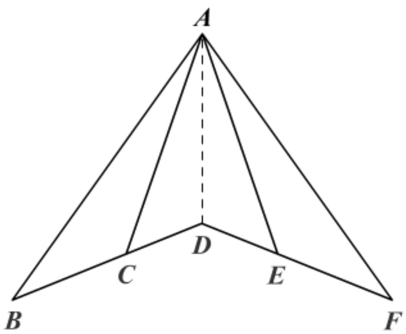


Figura 11.22

Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{AF}$, $B - C - D$

$\overline{BD} \cong \overline{FD}$, $D - E - F$

$B\hat{A}C \cong F\hat{A}E$

Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{AE}$,

$A\hat{C}D \cong A\hat{E}D$

$\overline{DC} \cong \overline{DE}$

Demostración

1. $\overline{AB} \cong \overline{AF}$	Hipótesis.
2. $\overline{BD} \cong \overline{FD}$	Hipótesis.
3. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$ (común)	Reflexividad.
4. $\Delta ABD \cong \Delta AFD$	L-L-L, de 1, 2, 3.
5. $\hat{B} \cong \hat{F}$	Ángulos correspondientes en Δs congruentes, de 4.
6. $B\hat{A}C \cong F\hat{A}E$	Hipótesis.
7. $\Delta ABC \cong \Delta AFE$	A-L-A, de 1, 5, 6.
8. $\therefore \overline{AC} \cong \overline{AE}$	Lados correspondientes en Δs congruentes, de 7.
9. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	Razón de 8.
10. $\therefore \overline{CD} \cong \overline{DE}$	Sustracción de segmentos, de 2 y 9.
11. $A\hat{C}B \cong A\hat{E}F$	Ángulos correspondientes en Δs congruentes, de 7.
$\therefore A\hat{C}D \cong A\hat{E}D$	Suplementos de ángulos correspondientes, de 11.

Ejercicios
Módulo 11

1. Determine cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas.

- Si un triángulo tiene dos lados congruentes es un triángulo isósceles.
- Si un triángulo tiene sus lados congruentes es un triángulo isósceles.
- Todo triángulo equilátero es isósceles.
- Un triángulo rectángulo es acutángulo.
- Un triángulo rectángulo puede ser equiángulo.
- Un triángulo isósceles puede ser rectángulo.
- La bisectriz de un triángulo biseca el ángulo y el lado opuesto.
- La mediana de un triángulo biseca el ángulo y el lado opuesto.
- La altura de un triángulo es la perpendicular del vértice al lado opuesto.
- El triángulo es un conjunto convexo.
- La región triangular es un conjunto convexo.
- El interior del triángulo es un conjunto convexo.
- El exterior del triángulo es un conjunto convexo.
- El centro de un triángulo es el punto de corte de las bisectrices.
- El baricentro de un triángulo es el punto de corte de las mediatrices.
- El ortocentro de un triángulo es el punto de corte de las alturas.
- El incentro de un triángulo es el punto de corte de las medianas.
- El centroide de un triángulo es el circuncentro.
- El incentro de un triángulo siempre es un punto interior del triángulo.
- El circuncentro de un triángulo puede ser un punto interior del triángulo.
- El baricentro de un triángulo puede estar en el triángulo.
- El ortocentro de un triángulo puede ser un punto de un triángulo.
- El circuncentro de un triángulo puede ser un punto del triángulo.
- En un triángulo isósceles, el incentro, el baricentro y el ortocentro son el mismo punto.

2. ABC es un triángulo isósceles de vértice B. Si M y N son los puntos medios de $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, pruebe que $\overline{AM} \cong \overline{CN}$.

3. En la figura 1:

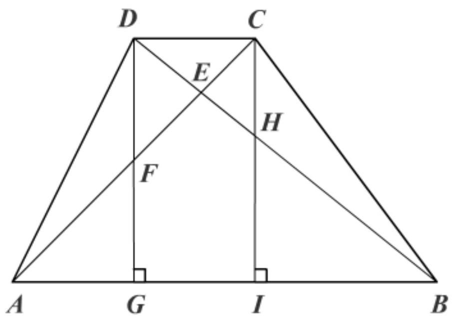


Figura 1

a. Nombre todos los triángulos que hay.
b. ¿Cuáles triángulos son rectángulos?
c. Nombre los posibles triángulos obtusángulos.
d. ¿Cuáles triángulos son acutángulos?

4. En el ΔABC isósceles, la base $AB=\frac{1}{3}AC$. Si el perímetro del ΔABC es igual al perímetro de un triángulo equilátero de lado ℓ, ¿cuál es la medida de cada uno de los lados del triángulo isósceles?

5. Si en el ΔABC isósceles de base AB, $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ son las bisectrices de $\hat{A}$ y $\hat{B}$, pruebe que $\Delta M\hat{A}B \cong \Delta N\hat{B}A$.

6. El perímetro del ΔABC es 12. Si $m=\left(\overline{AB}\right)=\frac{3}{5}AC$, $BC=\frac{4}{5}AC$, halle AB, BC, CA.

Demuestre las siguientes proposiciones (7 a 11):

7. Si una altura de un triángulo es mediana, el triángulo es isósceles.

8. Si una mediana de un triángulo es altura, el triángulo es isósceles.

9. Las medianas trazadas a los lados congruentes de un triángulo isósceles se cortan en segmentos correspondientes congruentes.

10. En un triángulo equilátero las medianas, las alturas y las bisectrices son congruentes y congruentes entre sí.

11. Los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero son los vértices de un triángulo equilátero.

12. ABC es un triángulo isósceles de vértice A. Sean $B-E-A$; $A-D-C$ tales que $\overline{BD}\cong\overline{EC}$. Demuestre que $C\hat{E}A \cong B\hat{D}A$.

13. ABC es un triángulo equilátero, y M, N, P son puntos sobre los lados AB, BC, CA, respectivamente, tales que $AM = BN = CP$. Demuestre que ΔMNP es equilátero.

14. Sobre las prolongaciones de los lados *AB, BC* y *CA* de un triángulo equilátero *ABC* se eligen los puntos *M, N, P,* respectivamente, de manera que $AM = BN = CP$. Demuestre que el ΔMNP es equilátero.

15. Sea *P* un punto en el interior del ΔABC, tal que $\overrightarrow{AP}$ corta a $\overline{BC}$ en *M,* y $\overrightarrow{CP}$ corta a $\overline{AB}$ en *N*. Si $\overline{PM} \cong \overline{PN}$ y $\overline{AP} \cong \overline{CP}$, entonces ΔABC es isósceles.

16. En un ΔABC se tiene $A-D-C$, $C-H-B$, con $CD = CH$ y $DA = HB$. Demuestre que $H\hat{A}B \cong D\hat{B}A$. Si $\overline{AH}$ y $\overline{BD}$ se cortan en *O*, demuestre que $OD = OH$.

17. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa.

- Toda recta que pase por el vértice de un triángulo isósceles biseca la base.
- La bisectriz de un ángulo de un triángulo isósceles biseca al lado opuesto al ángulo.
- La altura a la base de un triángulo isósceles es mediana.
- Si dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes congruentes, los lados correspondientes son congruentes.
- Si dos triángulos rectángulos tienen la misma hipotenusa, son congruentes.
- Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes congruentes, sus ángulos correspondientes son congruentes.
- Si dos triángulos isósceles tienen igual base, son congruentes.
- Si dos triángulos isósceles tienen igual altura a la base, son congruentes.
- En un triángulo isósceles toda bisectriz es perpendicular al lado opuesto.
- Dos triángulos equiláteros son congruentes si tienen un lado congruente.
- Dos triángulos equiláteros son congruentes si tienen algún elemento congruente.

18. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones.

- Todo punto de la bisectriz equidista de los lados del triángulo.
- Si un punto equidista de los lados de un ángulo, el punto pertenece a la bisectriz del ángulo.
- Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento.
- Si un punto equidista de los extremos de un segmento, el punto pertenece a la mediatriz.
- Si dos triángulos son congruentes, entonces los elementos homólogos son congruentes.
- Las alturas trazadas a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.
- Las bisectrices trazadas a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.

19. Si *O* es un punto interior del ΔABC isósceles de vértice *A* de manera que $OC = OB$, entonces $A\hat{O}B \cong A\hat{O}C$. ¿Qué ocurre con $A\hat{O}B$ y $A\hat{O}C$ si *O* está en el semiplano $\overleftrightarrow{BC}(\sim A)$ y $OC = OB$?

20. En un triángulo isósceles *ABC* de vértice *A* se prolongan los lados *AB* y *AC* una misma longitud $AE = AD$ con $B-A-E$ y $C-A-E$.

- Demuestre que $\Delta DBA \cong \Delta ECA$.
- Si *M* y *N* son puntos tales que $B-M-A$, $C-N-A$, $\overline{AM} \cong \overline{AN}$ y $\overline{CM}$ corta a $\overline{BN}$ en *O*, entonces $\Delta MOB \cong \Delta NOC$.
- Si se une *A* con *O*, pruebe que $\overrightarrow{AO}$ pasa por el punto medio de $\overline{BC}$.

21. Se toman sobre los lados AB y AC de un ΔABC isósceles longitudes iguales AE y AF; luego se unen los puntos E y F con el pie H de la altura AH, relativa a la base. Demuestre que $E\hat{H}A \cong F\hat{H}A$ y $\overline{AH} \perp \overline{EF}$.

En las siguientes figuras geométricas (22 a 27) hay puntos que evidentemente son colineales y lo cual no se especificará en la hipótesis.

22.

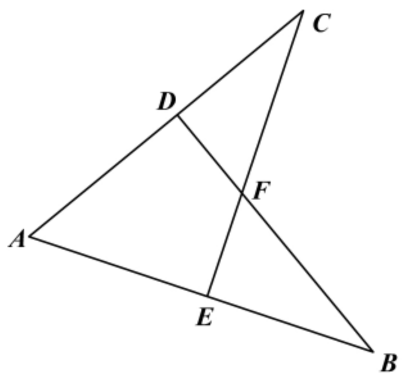


Figura 2

Hipótesis: $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, $\overline{CE} \perp \overline{AB}$

$\overline{AD} \cong \overline{AE}$

Tesis: $\overline{CF} \cong \overline{FB}$

23.

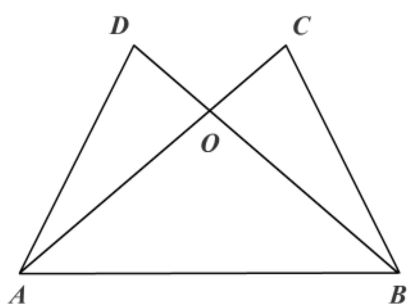


Figura 3

Hipótesis: $D\hat{A}B \cong C\hat{B}A$

$D\hat{B}A \cong C\hat{A}B$

Tesis: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

$\overline{OD} \cong \overline{OC}$

24.

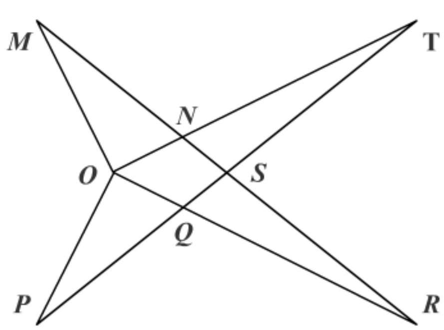


Figura 4

Hipótesis: $\overline{OM} \perp \overline{OT}$, $\overline{OP} \perp \overline{OR}$

$OM = OP$, $ON = OQ$

Tesis: $\Delta OPT \cong \Delta OMR$

$\Delta ONR \cong \Delta OQT$

ΔNQS es isósceles

25.

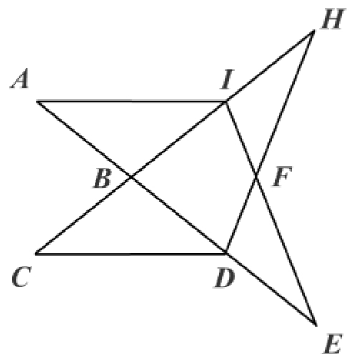


Figura 5

Hipótesis: $AB = BD = DE = CB = BI = IH$

Tesis: $\Delta BDC \cong \Delta BIA$

$\Delta IFH \cong \Delta DFE$

26.

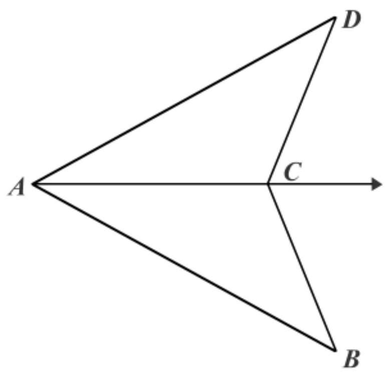


Figura 6

Hipótesis: $\overline{AD} \cong \overline{AB}$

$\overrightarrow{AC}$ bisectriz de $\hat{A}$

Tesis: $\overline{BC} \cong \overline{DC}$

AC contiene la bisectriz de $B\hat{C}D$

27.

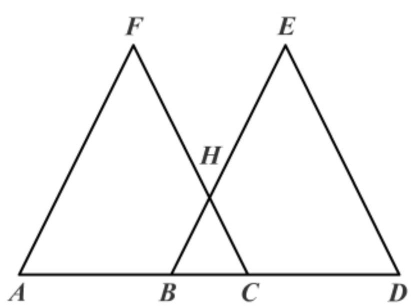


Figura 7

Hipótesis: $A - B - C - D$, $AB = CD$

$AF = DE$, $BE = CF$

Tesis: $E\hat{B}D \cong F\hat{C}A$, $FH = HE$

Módulo 12

Desigualdades

Contenidos del módulo

12.1 Desigualdades en el triángulo

Objetivos del módulo

1. Establecer relaciones de orden entre segmentos.
2. Establecer relaciones de orden entre ángulos.
3. Establecer relaciones de orden entre lados y ángulos de un triángulo o de dos triángulos.

Preguntas básicas

1. ¿Cuándo dos segmentos son desiguales?
2. ¿Cuándo dos ángulos son desiguales?
3. ¿Qué es el ángulo exterior de un triángulo y qué relación tiene con los ángulos interiores del triángulo?
4. ¿Qué relación existe entre los lados de un triángulo?
5. ¿Cuál es la relación entre los lados y los ángulos:
   a. de un triángulo?
   b. de dos triángulos?

Introducción

En este módulo se presenta básicamente la relación de no congruencia que hay entre lados y ángulos en los triángulos y se desarrollan algunos ejemplos de aplicación.

Johannes Kepler

(1571-1630). Astrónomo, matemático, físico y filósofo alemán nacido en Weil der Stadt, Württemberg, y muerto en Regensburg.

Vea el módulo 12 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

12.1 Desigualdades en el triángulo

En el capítulo 1 vimos las desigualdades entre los números reales y las propiedades de esas relaciones de orden. En este capítulo se tratarán las desigualdades de segmentos y ángulos y la forma como están relacionados en el triángulo.

Definición 12.1.1: Desigualdad de segmentos

Dos segmentos AB y CD son desiguales si y sólo si tienen medidas diferentes, es decir, si no son congruentes, y lo podemos expresar así:

$AB \neq CD \Leftrightarrow AB > CD$ o $AB < CD$

Definición 12.1.2: Desigualdad angular

Dos ángulos α y β son desiguales si y sólo si no tienen igual medida, es decir, si no son congruentes, y lo podemos expresar así:

$\alpha \neq \beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$ o $\alpha < \beta$

Si $A-B-C$ podemos decir que $AC > AB$, $AC > BC$. Si D pertenece al interior del ángulo ABC, entonces $m(A\hat{B}C) > m(A\hat{B}D)$, $m(A\hat{B}C) > m(D\hat{B}C)$. En las figuras 12.1*a* y 12.1*b* se ilustra esta situación.

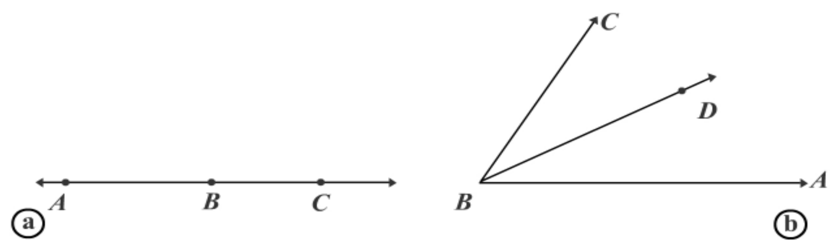


Figura 12.1

Definición 12.1.3: Ángulo exterior

Se llama *ángulo exterior* de un triángulo al ángulo formado por la prolongación de un lado y el lado adyacente y el cual forma un par lineal con el ángulo interior adyacente (figura 12.2).

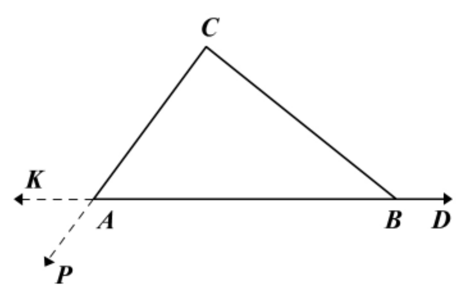


Figura 12.2

En la figura 12.2 $C\hat{B}D$, $C\hat{A}K$, $P\hat{A}B$ son ángulos exteriores del ΔABC, mientras que $K\hat{A}P$ no es un ángulo exterior. ¿Por qué?

Teorema 12.1.1: Del ángulo exterior

La medida de un ángulo exterior de un triángulo es mayor que la medida de cualquiera de los ángulos interiores no adyacentes (figura 12.3).

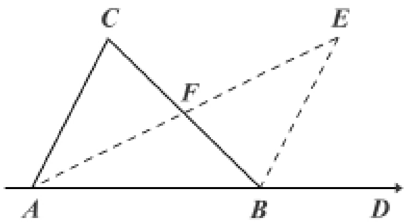


Figura 12.3

Hipótesis: ΔABC con $C\hat{B}D$ exterior

Tesis: $m(C\hat{B}D) > m(\hat{C})$

$m(C\hat{B}D) > m(\hat{A})$

Demostración

Sea F el punto medio de $\overline{BC}$ (todo segmento tiene un único punto medio). Trazamos $\overline{AF}$ y lo prolongamos hasta el punto E de tal manera que $\overline{AF} \cong \overline{FE}$ (postulado de la construcción de segmentos). Unimos E con B.

1. $\overline{CF} \cong \overline{FB}$	F, punto medio de $\overline{CB}$.
2. $C\hat{F}A \cong E\hat{F}B$	Opuestos por el vértice.
3. $\overline{AF} \cong \overline{FE}$	Construcción auxiliar.
4. $\Delta CFA \cong \Delta BFE$	L-A-L, de 1, 2, 3.
5. $\hat{C} \cong F\hat{B}E$	Ángulos correspondientes en Δs congruentes, de 4.
6. $m(C\hat{B}D) > m(C\hat{B}E)$	Desigualdad angular.
$\therefore m(C\hat{B}D) > m(\hat{C})$	Sustitución de 5 en 6.

En forma similar puede demostrarse que $m\left(C\hat{B}D\right) > m(\hat{A})$, eligiendo F como punto medio de $\overline{AB}$ y prolongando $\overline{CF} \cong \overline{FE}$.

Teorema 12.1.2: Relación L-A

Si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados tampoco lo son y al lado de mayor medida se opone el ángulo de mayor medida (figura 12.4).

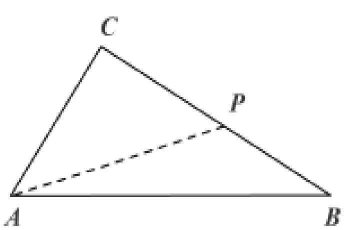


Figura 12.4

Hipótesis: ΔABC cualquiera $CB > CA$

Tesis: $m(C\hat{A}B) > m(\hat{B})$

Johannes Kepler

Kepler fue el creador de las tres leyes que llevan su nombre, acerca de los movimientos de los planetas. De acuerdo con la primera ley los planetas giran alrededor del Sol en órbitas elípticas en las que el Sol ocupa uno de los focos de la elipse. La segunda ley formula que las áreas barridas por el radio vector que une el centro del planeta con el centro del Sol son iguales en lapsos iguales; como consecuencia, cuanto más cerca está el planeta del Sol con más rapidez se mueve. La tercera ley establece que la relación de la distancia media, *d*, de un planeta al Sol, elevada al cubo y dividida por el cuadrado de su periodo orbital, *t*, es una constante, es decir, d^3/t^2 es igual para todos los planetas.

Sus obras más importantes fueron: *Astronomía nova*, *Mysterium cosmographicum* (El misterio cosmográfico), *Harmonices mundi* (Sobre la armonía del mundo).

Kepler también realizó una notable labor en el campo de la óptica: enunció una primera aproximación satisfactoria de la ley de la refracción, distinguió por vez primera claramente entre los problemas físicos de la visión y sus aspectos fisiológicos, y analizó el aspecto geométrico de diversos sistemas ópticos.

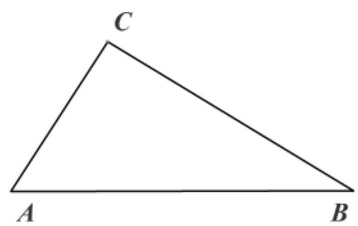
Demostración

1. Sea $P \in \overline{CB}$ tal que $\overline{CP} \cong \overline{CA}$	Postulado 19.
2. $m(C\hat{A}P) = m(C\hat{P}A)$	$\overline{CP} \cong \overline{CA}$ en el ΔCPA.
3. $m(C\hat{P}A) > m(\hat{B})$	$C\hat{P}A$ es exterior al ΔAPB.
4. $m(C\hat{A}P) > m(\hat{B})$	Sustitución de 2 en 3.
5. $m(C\hat{A}B) > m(C\hat{A}P)$	Desigualdad angular.
$\therefore m(C\hat{A}B) > m(\hat{B})$	De 5 y 4, transitividad.

Teorema 12.1.3: Relación A-L

Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos tampoco lo son y al ángulo de mayor medida se opone el lado de mayor medida (figura 12.5).

Podemos notar que este teorema es el recíproco del teorema 12.1.2 y para su demostración se tendrá en cuenta la ley de tricotomía de los números reales. Será una demostración por casos y reducción al absurdo.



Hipótesis: ΔABC cualquiera

$m(\hat{A}) > m(\hat{B})$

Tesis: $CB > CA$

Figura 12.5

Demostración

Por la ley de tricotomía tenemos que $CB < CA$, $CB = CA$, $CB > CA$. Si demostramos que CB no es menor ni igual a CA, necesariamente tiene que darse que $CB > CA$.

1. Si $CB < CA$, entonces por el teorema 12.1.2 $m(\hat{A}) < m(\hat{B})$, lo cual es una contradicción con la hipótesis: $m(\hat{A}) > m(\hat{B})$; luego $CB \not< CA$.

2. Si $CB = CA$, entonces el ΔABC es isósceles y los ángulos de la base son congruentes: $\hat{A} \cong \hat{B}$, lo cual contradice la hipótesis. Luego $CB \neq CA$.

3. Como $CB \not< CA$ y $CB \neq CA$, entonces la única posibilidad que queda es $CB > CA$.

Corolario 12.1.1

En todo triángulo rectángulo la medida de la hipotenusa es mayor que cualquiera de la medida de sus catetos.

Corolario 12.1.2: Distancia de un punto a una recta

El segmento más corto que une un punto a una recta en el plano es el segmento perpendicular del punto a la recta.

Teorema 12.1.4: Desigualdad triangular

En todo triángulo la medida de un lado es menor que la suma de las medidas de los otros dos lados (figura 12.6).

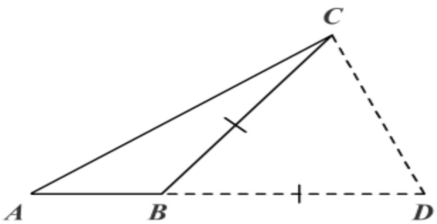


Figura 12.6

Hipótesis: ΔABC cualquiera.

Tesis: $CA < AB + BC$

Demostración

Existe un punto D en $\overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{BD} \cong \overline{BC}$ (postulado de la construcción de segmentos). Unimos D con C.

1. $m(\hat{D}) = m(D\hat{C}B)$	$\overline{BC} \cong \overline{BD}$ en ΔCBD.
2. $m(A\hat{C}D) > m(D\hat{C}B)$	Desigualdad angular.
3. $m(A\hat{C}D) > m(\hat{D})$	Sustitución de 1 en 2.
4. $AD > AC$	De 3. Relación A-L en ΔACD.
5. $AC < AD$	De 4. $AD > AC$
$\therefore AC < AB + BD$	$AD = AB + BD$.

En forma similar se puede demostrar que $CB < AC + AB$; $AB < AC + CB$.

Corolario 12.1.3
En todo triángulo la medida de un lado es mayor que la diferencia entre las medidas de los otros dos lados.

Teorema 12.1.5: De la bisagra

Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente congruentes y el ángulo comprendido entre éstos desigual, entonces al ángulo de mayor medida se opone un lado de mayor medida (figura 12.7).

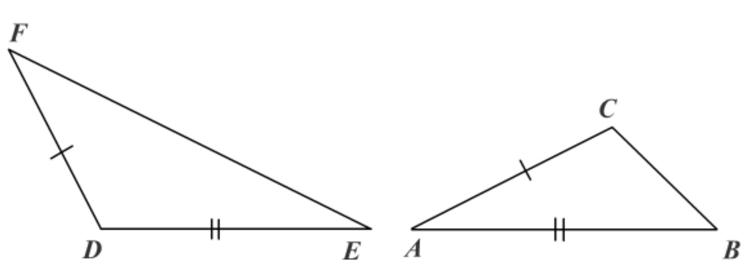


Figura 12.7

Hipótesis: ΔABC y ΔDEF

$\overline{AC} \cong \overline{FD}$

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$

$m(F\hat{D}E) > m(\hat{A})$

Tesis: $FE > CB$

Demostración

Sea $\overrightarrow{DP}$ tal que $P\hat{D}E \cong \hat{A}$ (postulado de la construcción de ángulos). Sea Q un punto en $\overrightarrow{DP}$ tal que $\overline{DQ} \cong \overline{AC}$ (postulado de la construcción de segmentos). Sea $\overrightarrow{DK}$ bisectriz de $F\hat{D}Q$ (un ángulo tiene una única bisectriz). Unimos K con Q, y Q con E (figura 12.8).

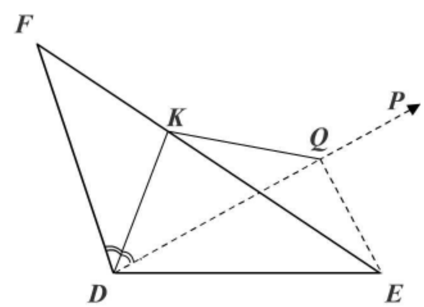


Figura 12.8

1. $\Delta QDE \cong \Delta CAB$	L-A-L ($\overline{DQ} \cong \overline{AC}$, $P\hat{D}E \cong \hat{A}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, de hipótesis).
2. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	Hipótesis.
3. $\overline{DQ} \cong \overline{DF}$	$\overline{DQ} \cong \overline{AC}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.
4. $F\hat{D}K \cong Q\hat{D}K$	$\overrightarrow{DK}$ bisectriz de $F\hat{D}Q$.
5. $\Delta FDK \cong \Delta QDK$	L-A-L, de 3, 4 y KD común.
6. $\overline{FK} \cong \overline{KQ}$	Lados correspondientes en Δs congruentes, de 5.
7. $QE < EK + KQ$	Desigualdad triangular en el ΔKQE.
8. $QE < EK + KF$	De 6 y 7: $FK = KQ$.
9. $QE < EF$	Adición de segmentos.
10. $QE = CB$	Lados correspondientes en Δs congruentes, de 1.
11. $CB < EF$	Sustitución de 10 en 9.
$\therefore EF > CB$	De 11, propiedad de desigualdades.

Nota: el punto Q puede estar sobre el lado $FE\,(F-Q-E)$ o en el interior del triángulo FDE.

Teorema 12.1.6

Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente congruentes y la medida del tercer lado desigual, entonces al lado de mayor medida se opone un ángulo de mayor medida.

Su demostración se deja como ejercicio y para ello se debe usar la ley de tricotomía.

Teorema 12.1.7: De la envolvente

El perímetro de toda línea quebrada convexa es menor que el perímetro de la línea quebrada envolvente que contiene los mismos extremos (figura 12.9).

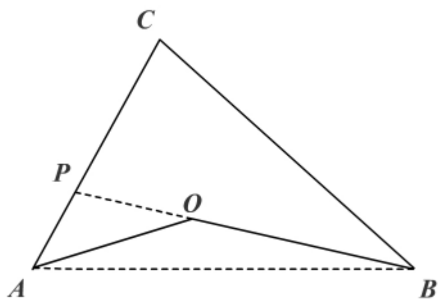


Figura 12.9

Hipótesis: ACB envolvente de AOB

Tesis: $OA + OB < CB + CA$

Demostración

Prolongamos $\overline{BO}$ hasta encontrar a $\overline{AC}$ en P y unimos A con B.

1. $BP < BC + CP$	Desigualdad triangular en el ΔBCP.
2. $AO < AP + PO$	Razón de 1 en el ΔAOP.
3. $BP = BO + OP$	Adición de segmentos.
4. $OB + OP < BC + CP$	Sustitución de 3 en 1.
5. $(OB + OP + OA) <$ $(BC + CP + AP + PO)$	Propiedad de las desigualdades, de 2 y 4.
6. $OB + OA < BC + CP + AP$	Propiedad de reales.
$\therefore OB + OA < BC + CA$	$CP + PA = CA$, de 6.

Corolario 12.1.4

El perímetro de toda línea poligonal es mayor que el perímetro de cualquier línea poligonal interior (figura 12.10).

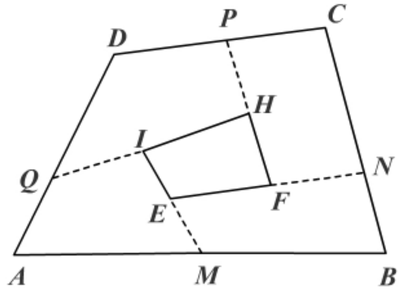


Figura 12.10

Hipótesis: $ABCD$ polígono

$EFHI$ polinomio interior

Tesis: $(EF + FH + HI + IE) <$

$(AB + BC + CD + DA)$

Demostración

Prolongamos $\overline{IE}$ hasta M en $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ hasta N en $\overline{BC}$, $\overline{FH}$ hasta P en $\overline{CD}$, $\overline{HI}$ hasta Q en $\overline{AD}$.

1. $IE + EM < IQ + QA + AM$ Teorema 12.1.4
2. $EF + FN < EM + MB + BN$ Teorema 12.1.4
3. $FH + HP < FN + NC + CP$ Teorema 12.1.4
4. $HI + IQ < HP + PD + DQ$ Teorema 12.1.4

Aplicando la propiedad aditiva de las desigualdades y la adición de segmentos concluimos que:

$$IE + EF + FH + HI < AB + BC + CD + DA.$$

Corolario 12.1.5
En todo triángulo la suma de las distancias desde un punto interior a los extremos de uno de los lados es menor que la suma de las medidas de los otros dos lados. La demostración se deja como ejercicio.

Ejemplo 12.1.1

Demuestre que la suma de las medidas de dos ángulos cualesquiera de un triángulo es menor que 180º (figura 12.11).

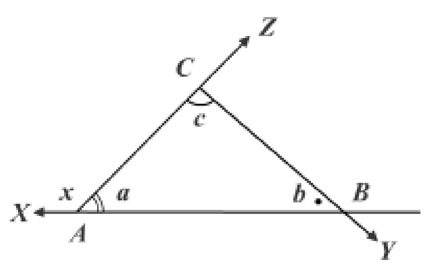


Figura 12.11

Hipótesis: ΔABC con los ángulos de la figura

Tesis: $a + b < 180º$
$b + c < 180º$
$c + a < 180º$

Demostración

1. $a + x = 180º$ — $\hat{a}$ y $\hat{x}$ son par lineal.
2. $b < x$ — x exterior al ΔABC.
3. $a + b < a + x$ — Propiedades de desigualdades.

$\therefore a + b < 180º$ — Sustitución de 1 en 3.

En forma similar se demuestran las otras relaciones.

Ejemplo 12.1.2

En un triángulo ABC, si $A - D - B$ tal que $AD = DC = CB$, entonces $AC > CB$ (figura 12.12).

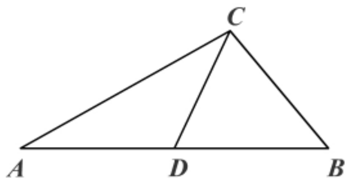


Figura 12.12

Hipótesis: ΔABC con $A - D - B$

$AD = DC = CB$

Tesis: $AC > CB$

Demostración

1. $m(C\hat{D}B) = m(\hat{B})$ — $\overline{CD} \cong \overline{CB}$ en ΔDCB.
2. $m(C\hat{D}B) > m(\hat{A})$ — $C\hat{D}B$ es exterior al ΔADC.
3. $m(\hat{B}) > m(\hat{A})$ — Sustitución de 1 en 2.

$\therefore AC > CB$ — Relación A-L en ΔACB, de 3.

¿Por qué se puede afirmar que $AC > DB$?

Ejemplo 12.1.3

En el ΔABC, la bisectriz de $\hat{B}$ corta a la bisectriz de $\hat{A}$ en D. Si $BC > AC$, pruebe que $BD > AD$ (figura 12.13).

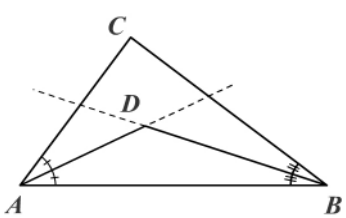


Figura 12.13

Hipótesis: ΔABC

$\overrightarrow{AD}$ bisectriz de $\hat{A}$

$\overrightarrow{BD}$ bisectriz de $\hat{B}$

$CB > CA$

Tesis: $BD > AD$

Demostración

1. $m(D\hat{A}B) = m(C\hat{A}D) = \frac{1}{2}m(C\hat{A}B)$ — $\overrightarrow{AD}$ bisectriz de $\hat{A}$.
2. $m(D\hat{B}A) = m(D\hat{B}C) = \frac{1}{2}m(C\hat{B}A)$ — $\overrightarrow{BD}$ bisectriz de $\hat{B}$.
3. $CB > CA$ — Hipótesis.
4. $m(C\hat{A}B) > m(C\hat{B}A)$ — De 3. Relación L-A en ΔABC.
5. $\frac{1}{2}m(C\hat{A}B) > \frac{1}{2}m(C\hat{B}A)$ — De 4, propiedad de reales.
6. $m(D\hat{A}B) > m(D\hat{B}A)$ — De 1, 2 y 5. Sustitución.

$\therefore DB > DA$ — De 6. Relación A-L en ΔDAB.

Ejemplo 12.1.4

Demuestre que en todo triángulo la medida de una altura es menor que la semisuma de las medidas de los lados adyacentes (que parten del mismo vértice) (figura 12.14).

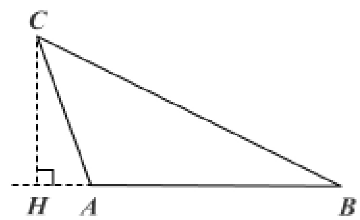


Figura 12.14

Hipótesis: ΔABC

$\overline{CH} \perp \overline{AB}$

Tesis: $CH < \dfrac{CA+CB}{2}$

Demostración

1. $CH < CB$ Corolario 12.1.2
2. $CH < CA$ Corolario 12.1.2
3. $2CH < CB + CA$ Adición de desigualdades, de 1 y 2.

$\therefore CH < \dfrac{CA+CB}{2}$ Propiedad de reales, de 3.

Ejercicios

Módulo 12

1. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

   - Un triángulo isósceles no tiene tres ángulos congruentes.
   - Cualquier ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquier ángulo interior.
   - Si en el $\Delta ABC, AB > AC,$ entonces $m(\hat{C}) > m(\hat{B})$.
   - Si un ángulo de un triángulo es mayor que un ángulo de un segundo triángulo, entonces el lado opuesto al ángulo del primer triángulo es mayor que el lado opuesto al ángulo del segundo triángulo.
   - Se puede formar un triángulo cuyos lados tienen las medidas 83, 132, 215.
   - Cualquiera de los catetos de un triángulo rectángulo es menor que la hipotenusa.
   - La diferencia entre las medidas de dos de los lados de un triángulo es menor que la medida del tercer lado.
   - El segmento más corto de *P* a *AB* es la perpendicular por *P* a *AB*.
   - Si los tres ángulos de un triángulo tienen medidas desiguales, entonces no hay dos lados del triángulo que sean congruentes.
   - Las diagonales de un rombo que no es un cuadrado son desiguales.

2. Sea un ΔABC con $AB = 12, BC = 10, AC = 7.$ Ordene los ángulos en orden creciente de medidas.

3. Si en un ΔABC, $m(\hat{A}) = 80º$, $m(\hat{B}) = 55º$, $m(\hat{C}) = 45º$, ordene las medidas de los lados en orden decreciente.

4. $ABCD$ es un cuadrilátero y BD una diagonal, $AD \perp AB$. Ordene los lados en forma creciente o decreciente (si es posible) sabiendo que $m(\hat{C}) = 50º$, $m(C\hat{D}B) = 56º$, $m(D\hat{B}C) = 74º$, $m(A\hat{D}B) = 65º$, $m(A\hat{B}D) = 25º$.

5. Demuestre que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son agudos.

6. Demuestre que todo triángulo equilátero es acutángulo.

7. Si $ABCDE$ es un pentágono, demuestre que el perímetro del triángulo *ABD* es menor que el perímetro del pentágono.

8. Demuestre que el perímetro de un cuadrilátero es mayor que la suma de las medidas de las diagonales.

9. *ABC* es un triángulo isósceles de vértice *C*. Si $A - D - C$ y $AB < AD$, entonces $m(\hat{C}) < m(\hat{A})$.

10. En el ΔABC se tiene: $A - F - C$; $A - D - B$; $FC = DB$; $AB > AC.$ Entonces se cumple que $FB > CD$.

Módulo 13

Otras congruencias de triángulos

Girard Desargues

(1591-1661). Matemático e ingeniero francés nacido y muerto en Lyon.

Contenidos del módulo

13.1 Otras congruencias de triángulos

Objetivos del módulo

1. Mostrar otros criterios de congruencia de triángulos.
2. Analizar otros criterios de congruencia de triángulos rectángulos.

Preguntas básicas

1. ¿Además de los criterios A-L-A, L-A-L, L-L-L, no existen otros criterios de congruencia de triángulos?
2. ¿Para congruencia de triángulos rectángulos sólo existen los criterios C-A y C-C?

Introducción

Los interrogantes planteados en esta sección se responderán mediante la presentación del criterio L-A-A para un triángulo cualquiera y los criterios H-A y H-C para la congruencia de triángulos rectángulos.

Vea el módulo 13 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

13.1 Otras congruencias de triángulos

Además de los criterios de congruencia ya presentados, existen otros criterios de congruencia de triángulos que estudiaremos a continuación.

Teorema 13.1.1 L-A-A

Sea $ABC \leftrightarrow DEF$ una correspondencia biunívoca entre los vértices de los triángulos ABC y DEF. Si dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos en uno de los triángulos son congruentes con sus correspondientes del otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes (figura 13.1).

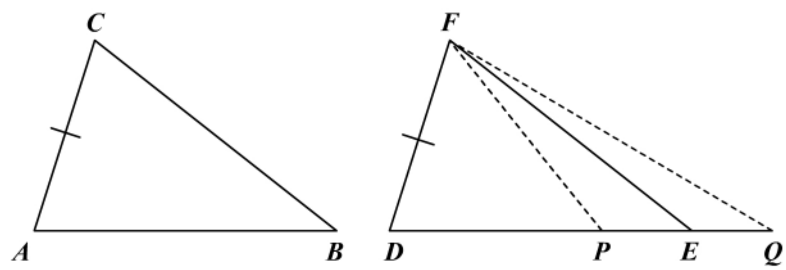


Figura 13.1

Hipótesis: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

$\hat{A} \cong \hat{D}$

$\hat{B} \cong \hat{E}$

Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Demostración
Se hará por reducción al absurdo.

De acuerdo con la ley del tercero excluido tenemos que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, o bien $\Delta ABC \not\cong \Delta DEF$.

Si $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, estamos aceptando la tesis. Supongamos que $\Delta ABC \not\cong \Delta DEF$ y sin pérdida de generalidad sea $AB > DE$, entonces por el postulado de la construcción de segmentos existe un punto Q en $\overrightarrow{DE}$ tal que $\overline{DQ} \cong \overline{AB}$ y unimos F con Q.

1. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	Hipótesis.
2. $\hat{A} \cong \hat{D}$	Hipótesis.
3. $\overline{AB} \cong \overline{DQ}$	Construcción auxiliar.
4. $\Delta ABC \cong \Delta DQF$	L-A-L, de 1, 2, 3.
5. $m(\hat{Q}) = m(\hat{B})$	Ángulos correspondientes en Δs congruentes, de 4.

6. $m(D\hat{E}F) > m(\hat{Q})$	$D\hat{E}F$ es exterior al ΔFEQ.
7. $m(D\hat{E}F) > m(\hat{B})$	Sustitución de 5 en 6.
8. Contradicción	De 7. Contradice la hipótesis.
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$	Negación del supuesto.

Haga la demostración si $AB < DE$.

Corolario 13.1.1: H-A (Hipotenusa-Ángulo)

Sea $ABC \leftrightarrow DEF$ una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos rectángulos. Si la hipotenusa y un ángulo agudo de uno de los triángulos son congruentes con la hipotenusa y el ángulo agudo del otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Teorema 13.1.2: H-C (Hipotenusa-Cateto)

Sea $ABC \leftrightarrow DEF$ una correspondencia biunívoca entre dos triángulos rectángulos. Si la hipotemusa y un cateto de un triángulo son congruentes con la hipotemusa y el cateto correspondiente del otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes (figura 13.2).

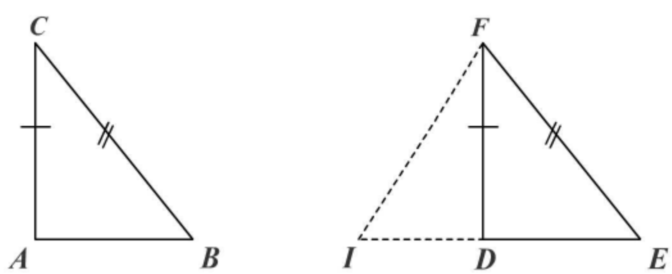


Figura 13.2

Hipótesis: $\hat{A}$ recto

$F\hat{D}E$ recto

$\overline{CB} \cong \overline{FE}$

$\overline{CA} \cong \overline{FD}$

Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Demostración

Existe un punto I en la prolongación de $\overline{DE}$ tal que $\overline{DI} \cong \overline{AB}$ (postulado de la construcción de segmentos). Unimos I con F.

1. $\Delta FDI \cong \Delta CAB$	C-C (L-A-L).
2. $\overline{FI} \cong \overline{CB}$	Lados correspondientes en Δs congruentes, de 1.
3. $\overline{CB} \cong \overline{FE}$	Hipótesis.
4. $\overline{FI} \cong \overline{FE}$	De 2 y 3, transitividad.
5. ΔFIE es isósceles	De 4, definición.

Girard Desargues

Desargues ideó la geometría proyectiva y se interesó por las aplicaciones de esta disciplina a la arquitectura y a la ingeniería. Utilizó por primera vez de manera sistemática la idea de «puntos del infinito» —idea original de Johannes Kepler— en un tratado sobre las secciones cónicas. A Desargues se le considera uno de los «padres» de la geometría proyectiva, cuyo verdadero desarrollo se produjo durante el siglo XIX a partir de la publicación del *Primer tratado de geometría proyectiva* por parte del matemático francés Jean Victor Poncelet.

Es el creador del teorema que lleva su nombre, o teorema de Desargues, que dice: «Si dos triángulos situados en el mismo plano están relacionados de manera que las rectas que unen los vértices homólogos pasan por un mismo punto (triángulos copulares), los lados homólogos se cortan en puntos de una misma recta (triángulos colineales). Recíprocamente, triángulos colineales son copulares».

6. $\hat{I} \cong \hat{E}$ — Ángulos de la base de ΔFIE.

7. $\Delta FDI \cong \Delta FDE$ — L-A-L $\left(\overline{CA} \cong \overline{FD},\ \hat{A} \text{ y } \hat{D} \text{ rectos, de } 6\right)$.

$\therefore \Delta CAB \cong \Delta FDE$ — De 1 y 7, transitividad.

Ejemplo 13.1.1

En un triángulo isósceles la altura a la base es bisectriz y mediana (figura 13.3).

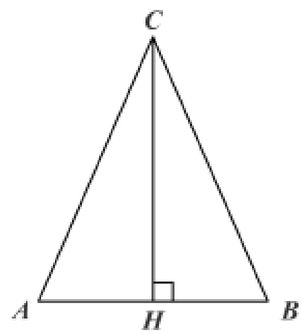


Figura 13.3

Hipótesis: ΔABC isósceles

$\overline{CA} \cong \overline{CB}$

$\overline{CH} \perp \overline{AB};\ A-H-B$

Tesis: $\overline{CH}$ bisectriz de $\hat{C}$

$\overline{CH}$ mediana

Demostración

1. $\Delta CHA,\ \Delta CHB$ rectángulos	$\overline{CH} \perp \overline{AB}$.
2. $\overline{CA} \cong \overline{CB}$	Hipótesis.
3. $\overline{CH} \cong \overline{CH}$ (común)	Reflexividad.
4. $\Delta CHA \cong \Delta CHB$	H-C, de 2 y 3.
5. $A\widehat{C}H \cong B\widehat{C}H$	De 4. ¿Por qué?
$\therefore \overline{CH}$ bisectriz de $\hat{C}$	De 5. ¿Por qué?
6. $\overline{AH} \cong \overline{BH}$	De 5. ¿Por qué?
7. $A-H-B$	De hipótesis.
8. H es punto medio de $\overline{AB}$	De 6 y 7, definición.
$\therefore \overline{CH}$ es mediana	De 8, definición.

Ejemplo 13.1.2

Si un triángulo tiene dos alturas congruentes, es isósceles (figura 13.4).

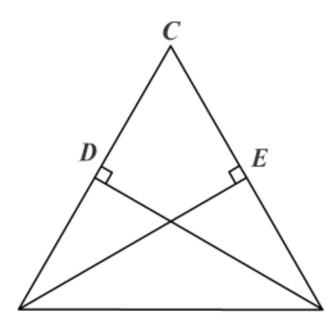


Figura 13.4

Hipótesis: ΔABC cualquiera

$\overline{AE} \perp \overline{BC},\ B-E-C$

$\overline{BD} \perp \overline{AC},\ A-D-C$

$\overline{AE} \cong \overline{BD}$

Tesis: ΔABC isósceles

Demostración

1. ΔABD, ΔABE rectángulos	$\overline{AE} \perp \overline{BC}$, $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.
2. $\overline{AE} \cong \overline{BD}$	Hipótesis.
3. $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (común).	Reflexividad.
4. $\Delta ABD \cong \Delta BAE$	H-C, de 2 y 3.
5. $D\hat{A}B \cong E\hat{B}A$	Ángulos correspondientes en Δs congruentes, de 4.
6. $\overline{CA} \cong \overline{CB}$	$D\hat{A}B \cong E\hat{B}A$ en ΔABC.
$\therefore \Delta ABC$ isósceles	De 6, definición.

Ejemplo 13.1.3

Si en un triángulo una bisectriz es mediana, entonces el triángulo es isósceles (figura 13.5).

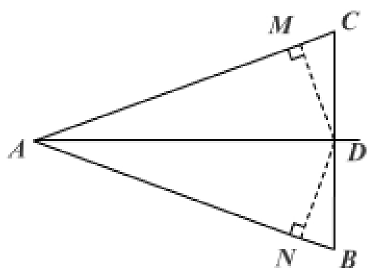


Figura 13.5

Hipótesis: ΔABC cualquiera

$\overline{AD}$ es bisectriz de $\hat{A}$

$\overline{AD}$ es mediana

Tesis: ΔABC es isósceles

Demostración

Trazamos $\overline{DM} \perp \overline{AC}$ y $\overline{DN} \perp \overline{AB}$, con $B-D-C$.

1. $B\hat{A}D \cong C\hat{A}D$	$\overline{AD}$ bisectriz de $\hat{A}$.
2. $\Delta AMD \cong \Delta AND$	H-A, de 1, y $\overline{AD}$ común.
3. $\overline{MD} \cong \overline{ND}$	Lados correspondientes en Δs congruentes, de 2.
4. $\overline{CD} \cong \overline{BD}$	$\overline{AD}$ es mediana.
5. $\Delta CDM \cong \Delta BDN$	H-C, de 3 y 4.
6. $\hat{C} \cong \hat{B}$	Ángulos correspondientes en Δs congruentes, de 5.
7. $\overline{CA} \cong \overline{BA}$	De 6, $\hat{C} \cong \hat{B}$ en ΔABC.
$\therefore \Delta ABC$ isósceles	De 7, definición.

Ejercicios
Módulo 13

1. Demuestre que las alturas trazadas a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes. ¿Qué parejas de triángulos resultan congruentes?

2. En un ΔABC rectángulo en A, $\overline{CD}$ es la bisectriz de $\hat{C}$. Demuestre que $DB > DA$. (Sugerencia: trace $\overline{DE} \perp \overline{BC}$).

3. Los lados $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ del ángulo XOY son cortados en A y B, respectivamente, por una secante ℓ. Las bisectrices de $X\hat{A}B$ y de $Y\hat{B}A$ se cortan en P. Demuestre que $P\hat{O}B \cong P\hat{O}A$.

4. Demuestre que en el ΔABC la mediana trazada desde A equidista de los vértices B y C.

5. En el cuadrilátero $ABCD$, si $AD = AB$, $DC = BC$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ y $\overline{AD} \perp \overline{CD}$. Demuestre que $\overline{AC}$ biseca a $\overline{BD}$.

6. En el cuadrilátero $ABCD$, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $\overline{AD} \cong \overline{CD}$. Demuestre que $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

7. En la figura 1:

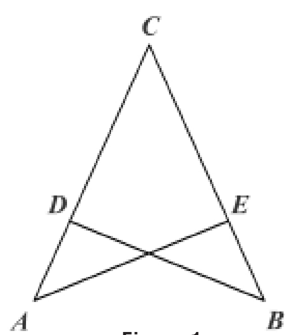


Figura 1

Hipótesis: $A-D-C$, $B-E-C$

$\overline{BD} \perp \overline{AC}, \overline{AE} \perp \overline{BC}$

$\overline{BD} \cong \overline{AE}$

Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

8. En la figura 2:

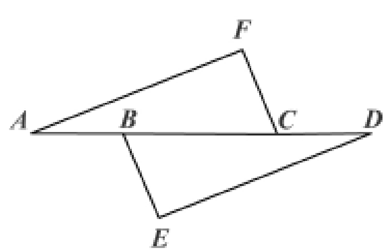


Figura 2

Hipótesis: $A-B-C-D$

$\overline{AF} \perp \overline{FC}$

$\overline{BE} \perp \overline{ED}$

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

$\hat{A} \cong \hat{D}$

Tesis: $\overline{FC} \cong \overline{BE}$

9. En la figura 3:

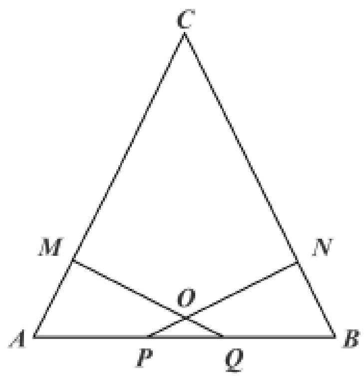


Figura 3

Hipótesis: $A-P-Q-B$

$AC = CB$

$\overline{QM} \perp \overline{AC}, \overline{PN} \perp \overline{BC}$

$CM = CN$

Tesis: ΔPOQ es isósceles

10. En la figura 4:

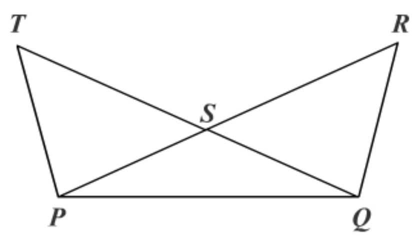


Figura 4

Hipótesis: $P-S-R$

$Q-S-T$

$PS = QS$

$\hat{T} \cong \hat{R}$

Tesis: $\overline{TQ} \cong \overline{PR}$

Auto Evaluación Autoevaluación

Capítulo 3
Triángulo

Módulos 11 al 13

1. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

- En todo triángulo el incentro, el baricentro y el ortocentro son diferentes.
- Si en la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF, AC = DF, AB = DE, \hat{A} \cong \hat{D},$ entonces la correspondencia es una congruencia.
- Dos triángulos equiláteros son congruentes si tienen una bisectriz congruente.
- Dos triángulos isósceles son congruentes si tienen congruentes los lados congruentes.
- Si dos triángulos tienen un lado congruente y la altura relativa a ese lado también congruente, los triángulos son congruentes.
- Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen congruentes un lado y un ángulo.
- Dos triángulos isósceles son congruentes si tienen congruentes un lado y un ángulo.
- En un triángulo cualquiera el perímetro es mayor que la suma de las medidas de las tres alturas.
- Si dos lados de un triángulo son desiguales, la medida del ángulo opuesto al lado mayor es menor que la medida del ángulo opuesto al lado menor.
- Si un triángulo no es isósceles, entonces una mediana a cualquiera de los lados es mayor que la altura a ese lado.

2. Determine en cada caso (figuras 1 a 4) el valor de las variables *x*, *y*.

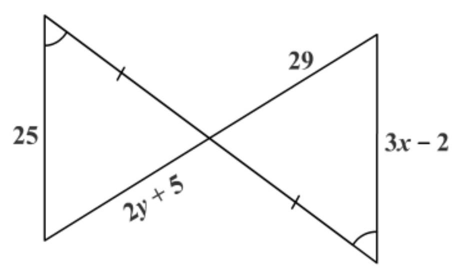


Figura 1

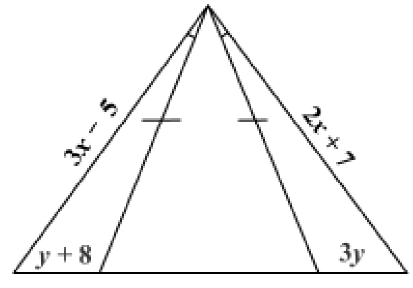


Figura 2

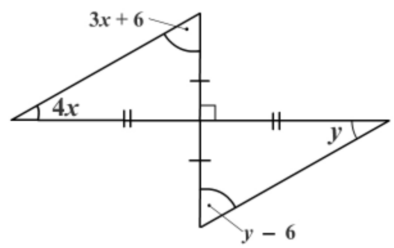


Figura 3

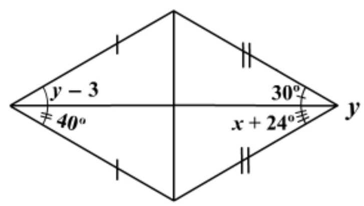


Figura 4

Para resolver los siguientes ejercicios (3 a 14) tenga presente la figura dada.

3.

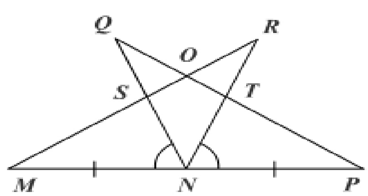


Figura 5

Hipótesis: N punto medio de $\overline{MP}$

$\hat{M} \cong \hat{P}$; $S\hat{N}M \cong T\hat{N}P$

Tesis: $\Delta MNR \cong \Delta PNQ$

$\Delta NTQ \cong \Delta NSR$

$\Delta SOQ \cong \Delta TOR$

4.

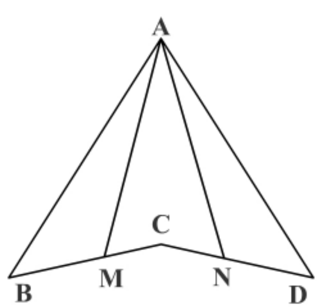


Figura 6

a. Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DC}$

$B\hat{A}M \cong D\hat{A}N$

Tesis: $\overline{AM} \cong \overline{AN}$

b. Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$; $B\hat{A}C \cong D\hat{A}C$

$A\hat{M}B \cong A\hat{N}D$

Tesis: $\overline{MC} \cong \overline{NC}$

c. Hipótesis: $\overline{AM} \cong \overline{AN}$; $\overline{MC} \cong \overline{CN}$

$\overline{MB} \cong \overline{ND}$

Tesis: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$

Autoevaluación

5.

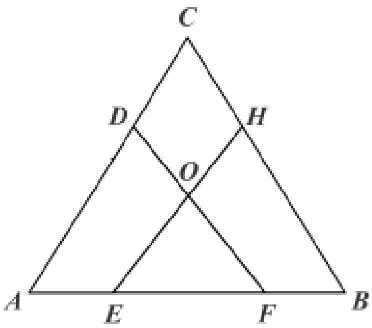


Figura 7

Hipótesis: $A - E - F - B$

$\hat{A} \cong \hat{B}$; $\quad H\hat{E}B \cong D\hat{F}A$

$\overline{AE} \cong \overline{FB}$

Tesis: $\overline{OD} \cong \overline{OH}$; $\quad \overline{CD} \cong \overline{CH}$

6.

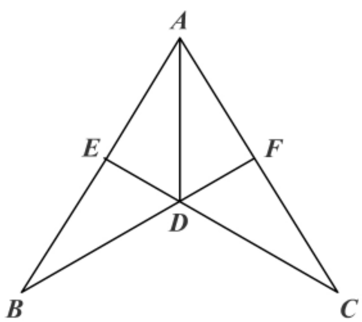


Figura 8

a. Hipótesis: $\overline{AE} \cong \overline{AF}$; $\quad \overline{EB} \cong \overline{FC}$

Tesis: $\overrightarrow{AD}$ bisectriz de $B\hat{A}C$

$\overline{BD} \cong \overline{CD}$

b. Hipótesis: $\overline{AD}$ bisectriz de $\hat{A}$

$\overline{AE} \cong \overline{AF}$

Tesis: $\overline{EB} \cong \overline{FC}$

$\overline{DE} \cong \overline{DF}$

c. Hipótesis: $\overline{AD}$ bisectriz de $\hat{A}$ y $E\hat{D}F$

Tesis: $\overline{EB} \cong \overline{FC}$

7.

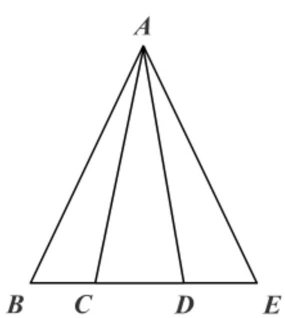


Figura 9

a. Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{AE}$; $\quad \overline{BC} \cong \overline{DE}$

Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{AD}$

b. Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{AE}$; $\quad B\hat{A}C \cong E\hat{A}D$

Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{AD}$

c. Hipótesis: $\hat{B} \cong \hat{E}$; $\quad \overline{AC} \cong \overline{AD}$

Tesis: $\overline{BC} \cong \overline{DE}$

d. Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{AE}$; $\quad \overline{BC} \cong \overline{DE}$

Tesis: $B\hat{A}D \cong E\hat{A}C$

8. Para las figuras 10, 11 y 12 se dan las mismas hipótesis y tesis.

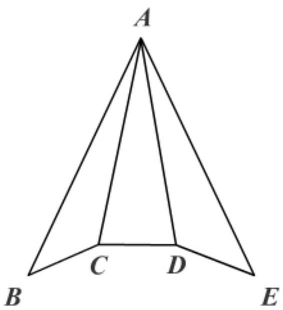


Figura 10

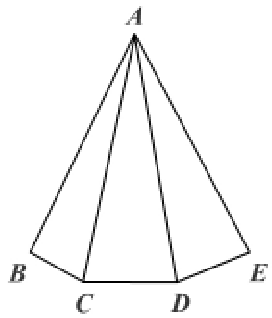


Figura 11

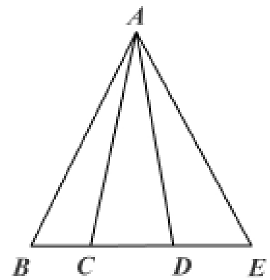


Figura 12

Hipótesis: $A\hat{C}B \cong A\hat{D}E$; $\overline{AC} \cong \overline{AD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DE}$

Tesis: $\overline{AB} \cong \overline{AE}$, $\overline{BD} \cong \overline{CE}$

9.

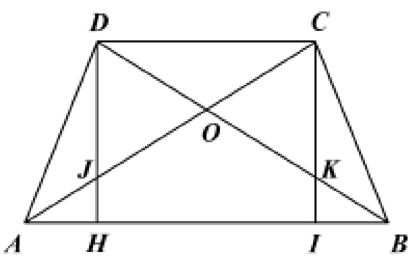


Figura 13

Hipótesis: $A-H-I-B$, $\overline{DH} \perp \overline{AB}$, $\overline{DC} \parallel AB$

$\overline{CI} \perp \overline{AB}$; $\overline{AD} \cong \overline{CB}$, $\overline{DH} = \overline{CI}$

Tesis: halle las parejas de Δs congruentes

10.

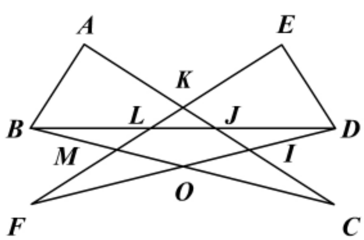


Figura 14

Hipótesis: $\overline{AB} \perp \overline{AC}$

$\overline{DE} \perp \overline{EF}$

$\Delta BML \cong \Delta DIJ$

Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta EDF$

$\Delta FOM \cong \Delta COI$

ΔKLJ es isósceles

Autoevaluación

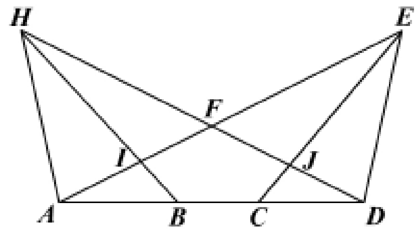
11. 

Figura 15

Hipótesis: $DE = AH$

$DH = AE$

$AB = CD$

$AI = DJ$

Tesis: $IB = JC$; $FI = FJ$

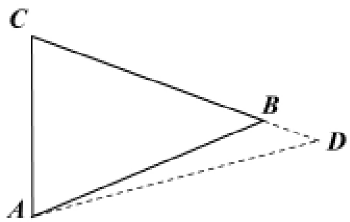
12. 

Figura 16

Hipótesis: $C - B - D$; $BC = BA$

$AB > AC$

Tesis: ΔADC es escaleno

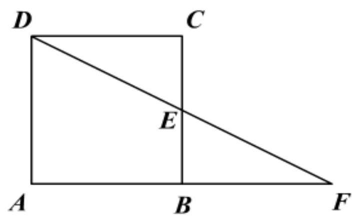
13. 

Figura 17

Hipótesis: $ABCD$ cuadrado

$A - B - F$, $D - E - F$

Tesis: $FD > AC$

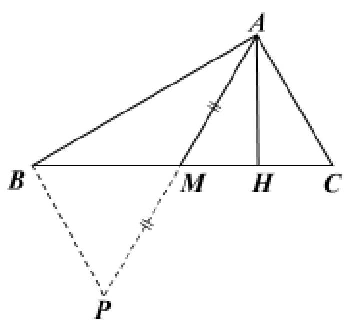
14. 

Figura 18

Hipótesis: ΔABC cualquiera

$\overline{AH}$ altura

$\overline{AM}$ mediana

$AB > AC$

Tesis: $m(A\hat{M}B) > m(A\hat{M}C)$

15. En un cuadrilátero $ABCD$, las diagonales se cortan en O.

- Si $C\hat{B}D \cong D\hat{B}A$ y $B\hat{D}C \cong B\hat{D}A$, entonces $\overline{AO} \cong \overline{OC}$ y $\overline{AC} \perp \overline{DB}$.
- Si $AB = AD$, $BC = DC$ y $AB < BC$, entonces $m(B\hat{C}D) < m(B\hat{A}D)$.

16. En el ΔABC, D está entre A y B de tal manera que $BC = BD$. Demuestre que:

$AB > BC, m(A\hat{C}B) > m(\hat{A}), m(D\hat{C}B) > m(\hat{A}), AC > CD.$

17. Si O es un punto interior en un triángulo ABC, demuestre que $OA + OB + OC$ varía entre el semiperímetro y el perímetro del triángulo. (Sugerencia: tenga presente el teorema 12.1.7, de la envolvente).

18. Demuestre que en todo triángulo la medida de una mediana es menor que la semisuma de las medidas de los lados que parten del mismo vértice. (Sugerencia: prolongue la mediana una longitud igual a ella).

19. Demuestre que en todo triángulo la suma de las medianas varía entre el perímetro y el semiperímetro.

20. Se prolonga el lado CA de un triángulo ABC, rectángulo en A, una longitud $AD = AC$; luego se traza a $\overline{CB}$ la perpendicular $\overline{DH}$ que corta a $\overline{AB}$ en P. Demuestre que $\overline{DB}$ es perpendicular a $\overrightarrow{CP}$.

21. Por un punto M de la bisectriz $\overrightarrow{AM}$ de un ángulo de vértice A se trazan dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 que hacen ángulos congruentes con $\overrightarrow{AM}$. La recta ℓ_1 corta a los lados de $\hat{A}$ en B y C, la recta ℓ_2 los corta en D y E. Demuestre que $BC = DE$.

22. $X\hat{O}Y$ es un ángulo agudo. Se levantan exteriormente $\overrightarrow{OX'}$ perpendicular a $\overrightarrow{OX}$, y $\overrightarrow{OY'}$ perpendicular a $\overrightarrow{OY}$ en diferentes semiplanos respecto a $\overrightarrow{OY}$. Se toman $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ sobre $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OX'}$, respectivamente; similarmente $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ sobre $\overrightarrow{OY}$ y $\overrightarrow{OY'}$, respectivamente. Luego se trazan $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que se cortan en $\overline{F}$; $\overline{CD}$ corta a $\overrightarrow{OX}$ en M y $\overline{AB}$ corta a $\overrightarrow{OY}$ en N. Si $\hat{B} \cong \hat{D}$ y $\overline{OD} \cong \overline{OB}$, demuestre que $MF = NF$.

23. Halle las parejas de triángulos congruentes que resultan cuando en un triángulo isósceles se determina:

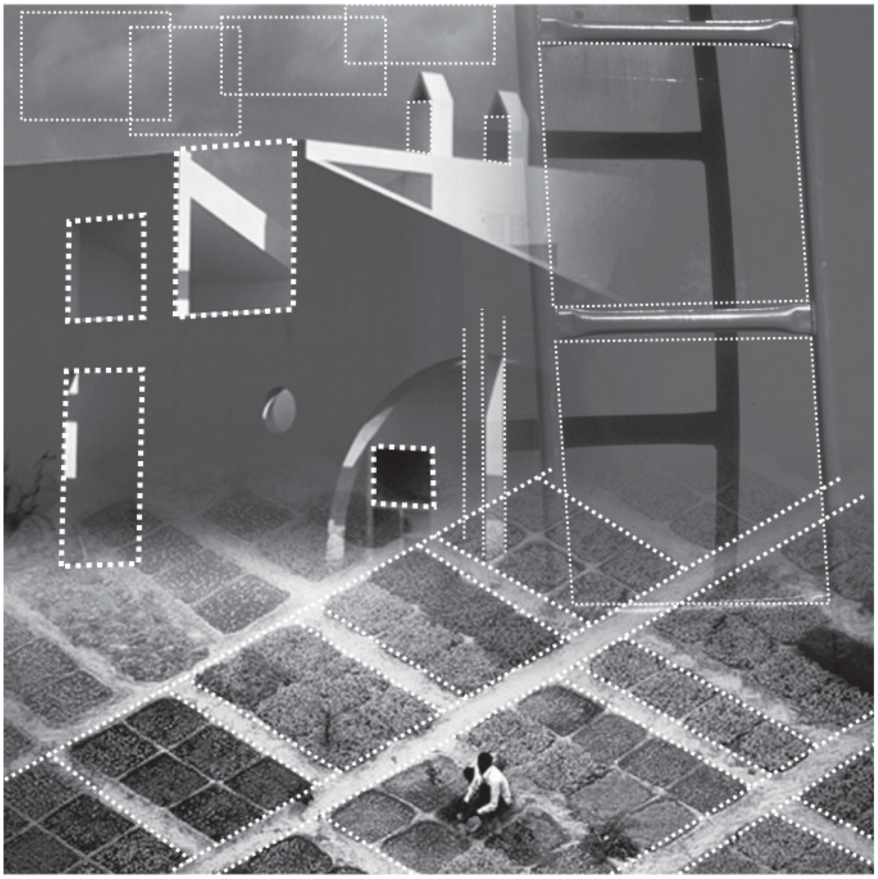
a. El baricentero
b. El ortocentro
c. El incentro

24. En un triángulo isósceles ABC de vértice A, P es el baricentro y M es el punto medio del segmento que une los extremos de las medianas a los lados congruentes. N es el punto medio de la base. Demuestre que A, P, M, N son colineales.

25. $ABCD$ es un trapecio isósceles con $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{DH}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{CI}$ perpendicular a $\overline{AB}$; los lados no paralelos se cortan en P, las diagonales se cortan en O, M es el punto medio de $\overline{AB}$ y N es el punto medio de $\overline{CD}$. Demuestre que P, N, O, M son colineales.

Autoevaluación

Autoevaluación



Capítulo 4
Cuadriláteros

Contenido breve

Presentación

En este capítulo se presenta quizás el postulado que más polémica ha causado –el 5º postulado de Euclides o postulado de las paralelas–, el cual ha creado la independencia de las geometrías y ha dado lugar a las geometrías no euclidianas.

Si la paralela por el punto exterior de una recta es única, se tiene la geometría euclidiana; si no es única, entonces aparece la geometría de Lovachesky; y si no pasa ninguna, se origina la geometría rimaniana. Las paralelas cortadas por transversales permiten determinar las medidas de los ángulos formados y las de los polígonos, al aplicar la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Al final del capítulo se analizan los puntos y rectas notables en el triángulo, así como las condiciones mínimas que debe cumplir un cuadrilátero para ser un paralelogramo. Se analizan los teoremas de la paralela y la base media en un triángulo y en un trapecio, respectivamente.

Módulo 14

Paralelismo y perpendicularidad

John Playfair

(1748-1819). Matemático y geólogo escocés.

Contenidos del módulo

14.1 Rectas perpendiculares
14.2 Rectas paralelas

Objetivos del módulo

1. Identificar rectas perpendiculares y rectas paralelas.
2. Diferenciar rectas perpendiculares, paralelas y oblicuas.
3. Relacionar rectas paralelas y perpendiculares.
4. Aplicar la demostración por reducción al absurdo.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es una recta perpendicular levantada por un punto de una recta?
2. ¿Cómo se levanta (traza) dicha perpendicular? (módulo 28, apartado 28.4)
3. ¿Qué es una perpendicular bajada a una recta desde un punto exterior a ella?
4. ¿Cómo se traza dicha recta? (módulo 28, apartado 28.4)
5. ¿Qué son rectas oblicuas?
6. ¿Cuál es la distancia de un punto a una recta?
7. ¿Qué propiedades tienen las rectas paralelas?
8. ¿Qué relación hay entre rectas paralelas y rectas perpendiculares?
9. ¿Qué dice el postulado de las paralelas?
10. ¿Cómo se traza una paralela a una recta? (módulo 28, apartado 28.4)

Introducción

En este módulo se demuestra la existencia y unicidad de las rectas perpendiculares (bajada – levantada) a una recta. Se muestra la existencia de la recta paralela a otra recta por un punto exterior a ella, se enuncia el postulado de las paralelas (quinto postulado de Euclides), se da el concepto de recta oblicua y se define la distancia de un punto a una recta.

Vea el módulo 14 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

14.1 Rectas perpendiculares

En el capítulo 2 se había definido la perpendicularidad entre dos rectas. Veamos ahora algunas propiedades que son importantes porque tratan de existencia y unicidad. Para su demostración se aplicará la demostración indirecta o reducción al absurdo.

Teorema 14.1.1

En un plano dado, por un punto cualquiera de una recta dada puede pasar una y sólo una recta perpendicular a la recta dada (figura 14.1).

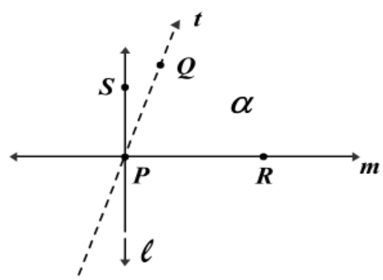


Figura 14.1

Hipótesis: la recta m
P un punto de la recta m

Tesis: a. Existe una recta $\ell \perp m$ que contiene a P (*existencia*)
b. Hay una sola recta $\ell \perp m$ que pasa por P (*unicidad*)

a. Demostración de la existencia: sea R un punto de la recta m, diferente de P. Existe un punto S en el semiplano α, tal que $R\hat{P}S$ es recto (por el postulado de la construcción de ángulos); entonces la recta PS es perpendicular a la recta m. Como $\overleftrightarrow{PS} = \ell$, entonces $\ell \perp m$; se ha demostrado así que existe la recta.

b. Demostración de la unicidad: hay que demostrar que ℓ es única. La demostración se hará por reducción al absurdo, así:

Existe más de una recta que pasa por P y es perpendicular a m o bien no existe más de una recta que pasa por P y es perpendicular a m (ley del tercero excluido).

Supongamos que hay otra recta t que pasa por P y es perpendicular a m (suposición temporal). Sea Q un punto en la recta t, entonces $R\hat{P}Q$ es recto (porque $t \perp m$ y forman ángulos rectos).

Tenemos entonces que $R\hat{P}S$ y $R\hat{P}Q$ son rectos, lo cual es una contradicción con el postulado de la construcción de ángulos; lo anterior significa que el supuesto es falso y concluimos que la recta ℓ es única.

Teorema 14.1.2

Por un punto dado, que no esté en una recta dada, pasa una y sólo una recta perpendicular a la recta dada.

Hipótesis: la recta m. El punto P no está en m

Tesis: a. Existe por lo menos una recta que contiene a P y es perpendicular a m (existencia)

b. La recta que pasa por P y es perpendicular a m es única (unicidad)

a. Demostración de la existencia (figura 14.2).

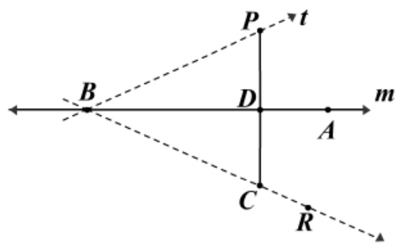


Figura 14.2

Sean A, B dos puntos sobre m. Trazamos $\overrightarrow{BP}$ y se forma el ángulo ABP.

Existe un punto R en el semiplano m $(\sim P)$ tal que $A\hat{B}R \cong A\hat{B}P$ (postulado de la construcción de ángulos).

Existe en $\overrightarrow{BR}$ un punto C tal que $\overline{BC} \cong \overline{BP}$ (postulado de la construcción de segmentos).

Trazamos $\overline{PC}$ que corta a m en D. Tenemos entonces que $\Delta CBD \cong \Delta PBD$ (L-A-L) y de la congruencia se deduce que $P\hat{D}B \cong C\hat{D}B$, y como son un par lineal $(P-D-C)$, tenemos que $P\hat{D}B$ y $C\hat{D}B$ son rectos (definición) y sus lados son perpendiculares. Luego $\overleftrightarrow{PC} \perp m$.

b. Demostración de la unicidad (figura 14.3). Se usará el método de reducción al absurdo.

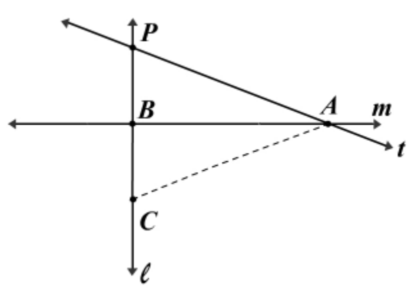


Figura 14.3

Por la ley del tercero excluido existe más de una recta que pasa por P y es perpendicular a m, o bien no existe más de una recta que pasa por P y es perpendicular a m. Supongamos que l y t son las dos rectas que pasan por P y son perpendiculares a m, y las cuales cortan a m en B y A, respectivamente.

Existe un punto C en la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{BP}$ tal que $\overline{BC} \cong \overline{BP}$ y trazamos $\overline{AC}$. $P\hat{B}A$ y $C\hat{B}A$ son rectos porque $\ell \perp m$ (teorema 9.3.5) y $P\hat{B}A \cong C\hat{B}A$, luego $\Delta PBA \cong \Delta CBA$ por L-A-L y los ángulos correspondientes son congruentes: $C\hat{A}B \cong B\hat{A}P$ y serían ángulos rectos porque $\ell \perp m$; luego $\overline{CA} \perp m$, lo cual es imposible porque $\ell \perp m$ en A y $\overline{CA} \perp m$ contradicen el teorema 14.1.1 El supuesto es falso y sólo hay una recta que pasa por P y es perpendicular a m.

John Playfair

El progreso de John Playfair en las ciencias matemáticas fue tan rápido que sustituyó a su profesor de física cuando éste enfermó. En 1785 fue nombrado Profesor Asociado de Matemáticas en la Universidad de Edimburgo. Niveló la notación de los puntos y lados de las figuras en los primeros seis libros de su edición de Euclides. A estos libros añadió otros tres como suplemento, y agregó una sección de notas como apéndices en las que daba sus razones para haber alterado los volúmenes anteriores y una exposición brillante en el complicado asunto de las líneas paralelas.

Playfair popularizó el axioma de las paralelas, que es equivalente al quinto postulado de las paralelas de Euclides, y cuyo enunciado es el siguiente: *Axioma de las paralelas*: «Por un punto dado que no esté en una recta dada sólo se puede trazar una única línea recta paralela».

Corolario 14.1.1
Ningún triángulo puede tener dos ángulos rectos.

Definición 14.1.1: Recta oblicua

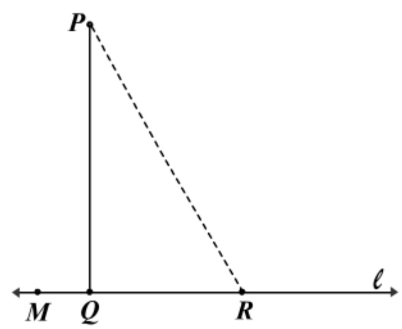
Una recta que no corte a otra perpendicularmente se dice que es una *recta oblicua* o simplemente una *oblicua*.

Definición 14.1.2: Distancia de un punto a una recta

La distancia entre una recta y un punto que no está en la recta es la medida del segmento perpendicular trazado desde el punto a la recta. Si el punto dado está sobre la recta, la distancia es 0.

Teorema 14.1.3

El segmento de menor medida trazado desde un punto a una recta es el segmento de la perpendicular bajada a la recta desde el punto (figura 14.4).



Hipótesis: recta ℓ

$P \notin \ell$

$\overline{PQ} \perp \ell$

$R \neq Q,\ R \in \ell$

Tesis: $PQ < PR$

Figura 14.4

Demostración

Sean M y R puntos sobre ℓ tal que $M - Q - R$. $m(\hat{R}) < m(M\hat{Q}P)$ porque $M\hat{Q}P$ es exterior al ΔPQR. Ahora, $M\hat{Q}P \cong R\hat{Q}P$ por ser rectos ($\overline{PQ} \perp \ell$). Sustituyendo queda: $m(\hat{R}) < m(P\hat{Q}R)$. Luego $PQ < PR$ (relación A-L en ΔPQR).

14.2 Rectas paralelas

Recordemos que dos rectas coplanares son *paralelas* si y sólo si no se cortan o son coincidentes (figura 14.5).

El paralelismo como relación entre rectas es una relación de equivalencia (cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva).

El paralelismo también se aplica a los rayos o segmentos de rectas paralelas. Podemos afirmar que si en la figura 14.6 $\ell \| m$, entonces $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{DF}$, $\overline{AB} \| \overline{AC}$, $\overline{AC} \| \overline{EF}$, etc.

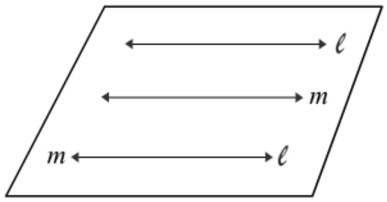


Figura 14.5

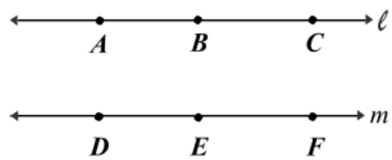


Figura 14.6

Es claro entonces que dos rectas coplanares son paralelas o incidentes. Si las rectas no son coplanares es posible que no sean paralelas ni incidentes, como ocurre con las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de la figura 14.7, las cuales están en planos diferentes. De estas rectas se dice que son "rectas cruzadas".

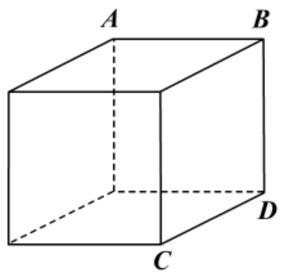
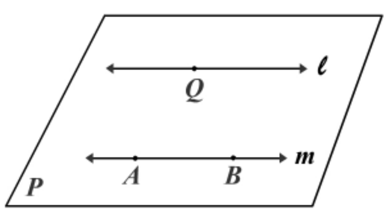


Figura 14.7

En esta parte de la geometría plana siempre vamos a usar rectas en un mismo plano.

Teorema 14.2.1

Dos rectas paralelas diferentes determinan un único plano que las contiene (figura 14.8).



Hipótesis: $\ell \neq m$; $\ell \parallel m$

Tesis: el plano P las contiene y es único

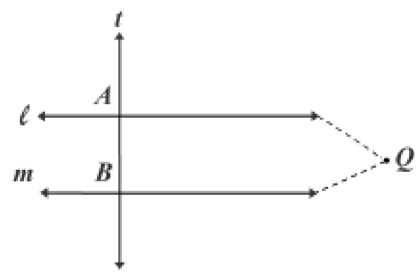
Figura 14.8

Demostración

Si $\ell \parallel m$, entonces, por la misma definición de rectas paralelas, existe un plano P que contiene a ℓ y m. Si Q es un punto de ℓ, y A y B son puntos de m, entonces son puntos no colineales y existe un único plano que los contiene (postulado 7.1.4) y el cual contiene a ℓ y m, luego P es el único plano que las contiene.

Teorema 14.2.2

Dos rectas coplanares son paralelas si son perpendiculares a una misma recta (figura 14.9).



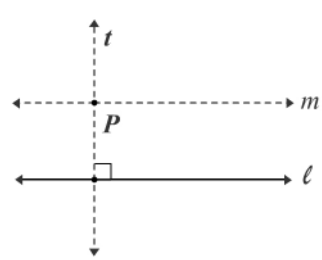
Hipótesis: ℓ, m coplanares
$\ell \perp t$ en A
$m \perp t$ en B
Tesis: $\ell \parallel m$

Figura 14.9

Demostración (reducción al absurdo)
Como ℓ y m son coplanares, entonces, por la ley del tercero excluido, ℓ es paralela a m ($\ell \parallel m$) o bien ℓ no es paralela a m ($\ell \nparallel m$). Si $\ell \nparallel m$, las rectas deben cortarse en un punto Q (las rectas coplanares no paralelas son incidentes). Por el punto Q que es exterior a la recta t pasan dos rectas ℓ y m que son perpendiculares a t y esto contradice el teorema 14.1.2, luego el supuesto $\ell \nparallel m$ es falso y concluimos que $\ell \parallel m$.

Teorema 14.2.3

Sea ℓ una recta y P un punto que no está en la recta, entonces existe por lo menos una recta que pasa por P y es paralela a la recta dada (figura 14.10).



Hipótesis: ℓ recta dada
P no está en ℓ

Tesis: existe la recta m que pasa por P y es paralela a la recta ℓ.

Figura 14.10

Demostración
Existe una única recta t que pasa por P y es perpendicular a la recta ℓ (teorema 14.1.2). Sea m una recta que pasa por P y es perpendicular a la recta t (teorema 14.1.1). Por el teorema 14.2.2 concluimos que $\ell \parallel m$.

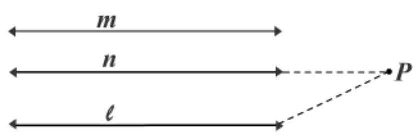
Postulado 14.2.1 (Postulado de las paralelas)
Por un punto dado exterior a una recta dada pasa una y sólo una recta paralela a la recta dada.

El postulado así enunciado se debe a Jhon Playfaire (1748-1819), siendo esta la razón por la cual el postulado de las paralelas se conoce como postulado de Playfaire y es equivalente al enunciado por Euclides que dice: "Si dos rectas son cortadas por una transversal de tal manera que la suma de los ángulos interiores (colaterales) a las rectas y de un mismo lado de la transversal es menor que 180º, entonces las rectas se cortan al mismo lado de la transversal".

La existencia de la recta paralela en el postulado de las paralelas está justificado con el teorema 14.2.3. La unicidad de esta paralela es la que en realidad constituye el postulado.

Teorema 14.2.4

Dos rectas paralelas a un tercera recta son paralelas entre sí (figura 14.11).



Hipótesis: $\ell \parallel m$,

$n \parallel m$

Tesis: $\ell \parallel n$

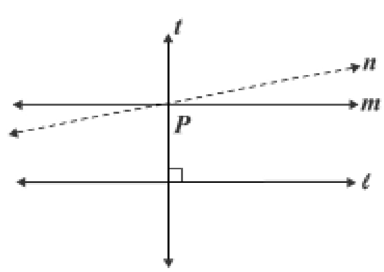
Figura 14.11

Demostración (reducción al absurdo)

$\ell \parallel n$ o bien $\ell \nparallel n$ (ley del tercero excluido). Si $\ell \nparallel n$ entonces se cortan en un punto P. Por P estarían pasando dos rectas paralelas (por la hipótesis) a la misma recta m y esto es imposible porque contradice el postulado de las paralelas. Luego el supuesto ($\ell \nparallel n$) es falso y concluimos que $\ell \parallel n$.

Teorema 14.2.5

Si dos rectas coplanares son paralelas y una tercera recta es perpendicular a una de ellas, entonces es perpendicular a la otra (figura 14.12).



Hipótesis: $\ell \parallel m$

t transversal a ℓ y m

$t \perp \ell$

Tesis: $t \perp m$

Figura 14.12

Demostración (reducción al absurdo)
La recta t es perpendicular a m o bien t no es perpendicular a m (ley del tercero excluido).

Si t y m no son perpendiculares, entonces existe una recta n que es perpendicular a t en P, donde m intercepta a t; la recta n sería entonces paralela a ℓ (teorema 14.2.2), lo cual es imposible porque $n \parallel \ell$ y $m \parallel \ell$ contradicen el postulado de las paralelas.

Módulo 15

Ángulos especiales

Nikolái Ivánovich Lobachevski

(1793-1856). Matemático ruso nacido en Nizni Nóvgorod.

Contenidos del módulo

15.1 Paralelas y ángulos especiales
15.2 Ángulos en figuras geométricas

Objetivos del módulo

1. Definir una recta transversal.
2. Estudiar los ángulos formados entre rectas.
3. Analizar las condiciones para el paralelismo.
4. Estudiar ángulos en las figuras geométricas.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es una recta transversal?
2. ¿Cómo se llaman los ángulos formados por dos rectas que son intersecadas por una transversal?
3. ¿Cómo saber si dos rectas son paralelas?
4. ¿Cómo son los ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal?
5. ¿Cuánto mide el ángulo exterior de un triángulo?
6. ¿Qué propiedades tienen los ángulos interiores de un triángulo? ¿De un cuadrilátero? ¿De un polígono?

Introducción

En este módulo analizaremos los ángulos determinados por rectas cortadas por una transversal, los cuales nos llevan a determinar si las rectas son o no paralelas de acuerdo con la característica del ángulo. Estudiaremos además los ángulos relacionados con las figuras geométricas, especialmente en los triángulos.

Vea el módulo 15 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

15.1 Paralelas y ángulos especiales

Definición 15.1.1: Recta transversal

Una recta es *transversal* a dos o más rectas coplanares si y sólo si las interseca en puntos diferentes. En la figura 15.1, la recta S no es transversal a las rectas r y n porque las interseca en el mismo punto, pero la recta t es transversal a ℓ y m porque las interseca en A y B, respectivamente.

Cuando dos rectas son cortadas por una transversal se forman ocho ángulos (figura 15.1). Cuatro de ellos están por "fuera" de las rectas ℓ y m y se llaman "ángulos exteriores"; son los ángulos 1, 2, 7, 8. Otros cuatro están "entre" las rectas ℓ y m y se llaman "ángulos interiores"; son los ángulos 3, 4, 5, 6.

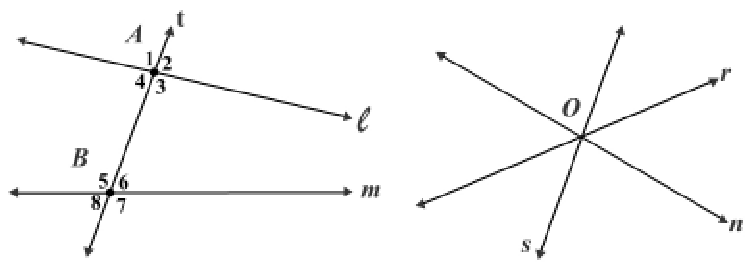


Figura 15.1

Las parejas de ángulos a diferentes lados de la secante se llaman ''ángulos alternos''; son los ángulos 1 y 2, 1 y 3,...,1 y 7,...

Las parejas de ángulos interiores no adyacentes que están situados en diferente semiplano respecto a la transversal se llaman "ángulos alternos internos"; son los ángulos 4 y 6, 3 y 5.

Las parejas de ángulos exteriores no adyacentes que están situados en diferentes semiplanos respecto a la transversal se llaman "ángulos alternos externos"; son los ángulos 1 y 7, 2 y 8.

Las parejas de ángulos no adyacentes, uno interior y otro exterior, que están situados en un mismo semiplano respecto a la transversal se llaman "ángulos correspondientes"o ''ángulos colaterales''; son los ángulos 1 y 5, 4 y 8, 2 y 6, 3 y 7.

Las parejas de ángulos interiores en un mismo semiplano respecto a la transversal se llaman "ángulos colaterales interiores"; son los ángulos 4 y 5, 3 y 6.

Las parejas de ángulos exteriores en un mismo semiplano respecto a la transversal se llaman "ángulos colaterales exteriores"; son los ángulos 1 y 8, 2 y 7.

Teorema 15.1.1

Si dos rectas al ser cortadas por una transversal forman ángulos alternos internos congruentes, son paralelas (figura 15.2).

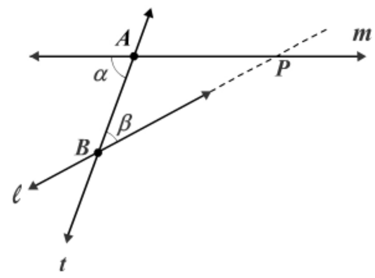


Figura 15.2

Hipótesis: t transversal a ℓ y m en A y B

$\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$ son alternos internos

Tesis: $\ell \parallel m$

Demostración (reducción al absurdo)

$\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$ por la hipótesis.

Por el principio del tercero excluido $\ell \parallel m$ o bien $\ell \nparallel m$. Supongamos que $\ell \nparallel m$, entonces ℓ interseca a m en un punto P (en el plano dos rectas son paralelas o incidentes), y en el $\triangle ABP$ α es un ángulo exterior, lo cual implica que $\alpha > \beta$, que es imposible porque contradice la hipótesis $\alpha = \beta$ (ley de tricotomía). Luego $\ell \parallel m$ (negación del supuesto).

Teorema 15.1.2

Si dos rectas al ser cortadas por una transversal forman ángulos correspondientes congruentes, son paralelas (figura 15.3).

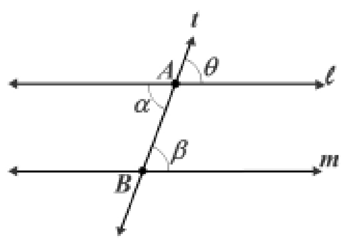


Figura 15.3

Hipótesis: t transversal a ℓ y m en A y B

$\hat{\theta} \cong \hat{\beta}$ son correspondientes

Tesis: $\ell \parallel m$

Demostración

Por hipótesis $\theta = \beta$ y por opuestos por el vértice $\alpha = \theta$. De la transitividad: $\alpha = \beta$. Luego $\ell \parallel m$ por el teorema 15.1.1.

Corolario 15.1.1

Si dos rectas al ser cortadas por una transversal forman ángulos colaterales interiores suplementarios, son paralelas. La demostración de este corolario se deja como ejercicio.

Corolario 15.1.2

Si dos rectas cortadas por una transversal forman ángulos alternos externos congruentes, son paralelas. Su demostración se deja como ejercicio.

Nikolái Ivánovich Lobachevski

Fue uno de los primeros en aplicar un tratamiento crítico a los postulados fundamentales de la geometría euclidiana. En forma independiente del húngaro János Bolyai y del alemán Carl Gauss, Lobachevski descubrió un sistema de geometría no euclidiana. Entre sus obras más importantes están *Sobre los principios de la geometría* y *Geometría imaginaria*.

Teorema 15.1.3

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes (figura 15.4).

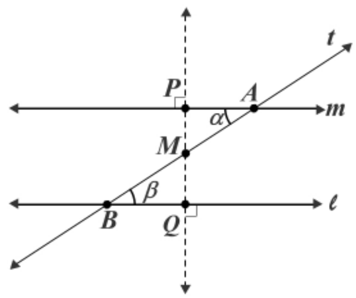


Figura 15.4

Hipótesis: t transversal a ℓ y m en A y B

$\ell \parallel m$

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son alternos internos

Tesis: $\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$

Demostración

Sea M el punto medio de $\overline{AB}$ (M es único). Por M se traza $\overline{QP} \perp m$ ($M \notin m$ y teorema 14.1.1). Por el teorema 14.2.5, $\overline{QP} \perp \ell$.

$\Delta AMP \cong \Delta BMQ$ por H-A (son triángulos rectángulos con $\overline{AM} \cong \overline{BM}$) y $P\hat{A}M \cong Q\hat{B}M$ (por opuestos por el vértice). $\therefore \hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$ por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes.

La demostración de los siguientes teoremas se deja como ejercicio.

Teorema 15.1.4

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.

Teorema 15.1.5

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos alternos externos son congruentes, y recíprocamente.

Teorema 15.1.6

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos colaterales interiores son suplementarios, y recíprocamente.

Teorema 15.1.7

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos colaterales exteriores son suplementarios, y recíprocamente.

Ejemplo 15.1.1

En la figura 15.5:

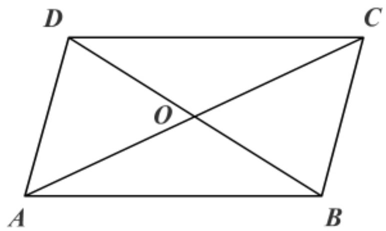


Figura 15.5

Hipótesis: $ABCD$ cuadrilátero

$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales

$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$

$\overline{DO} \cong \overline{OB}$, $\overline{AO} \cong \overline{OC}$

Tesis: $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Demostración

$\Delta DOC \cong \Delta BOA$ por L-A-L ($\overline{DO} \cong \overline{OB}$, $D\hat{O}C \cong B\hat{O}A$ y $\overline{AO} \cong \overline{OC}$), $D\hat{C}O \cong O\hat{A}B$ por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes. Por el teorema 15.1.1 concluimos que $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$. $\Delta DOA \cong \Delta BOC$ por L-A-L. Por ángulos correspondientes en triángulos congruentes: $A\hat{D}O \cong C\hat{B}O$.

Concluimos entonces que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ por el teorema 14.2.5.

Ejemplo 15.1.2

En la figura 15.6:

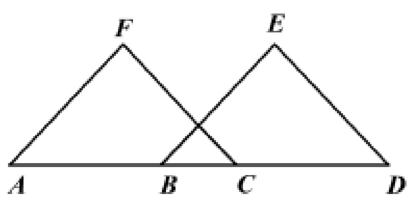


Figura 15.6

Hipótesis: $A-B-C-D$

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

$\overline{AF} \cong \overline{BE}$

$\overline{FC} \cong \overline{ED}$

Tesis: $\overline{FC} \parallel \overline{DE}$

Demostración

Por adición de segmentos $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. Ahora, el $\Delta AFC \cong \Delta BED$ por L-L-L; por ángulos correspondientes en triángulos congruentes se tiene que $A\hat{C}F \cong B\hat{D}E$. Luego $\overline{FC} \parallel \overline{DE}$ por el teorema 15.1.2.

Ejemplo 15.1.3

En la figura 15.7:

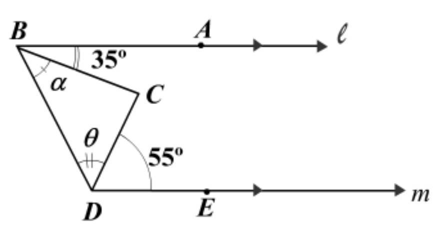


Figura 15.7

Hipótesis: $\ell \parallel m$

$m(A\hat{B}C) = 35º$

$m(E\hat{D}C) = 55º$

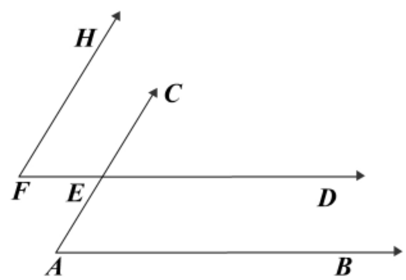
Tesis: $\alpha + \theta = ?$

Solución

$E\widehat{D}B$ y $A\widehat{B}D$ son colaterales interiores suplementarios porque $\ell \parallel m$, y por el teorema 15.1.6 $\alpha + 35° + \theta + 55° = 180° \Rightarrow \alpha + \theta = 90°$.

Ejemplo 15.1.4

Demuestre que si dos ángulos tienen sus lados paralelos son congruentes o son suplementarios (figuras 15.8, 15.9 y 15.10).



a. Hipótesis: $H\widehat{F}D$ y $C\widehat{A}B$ con

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DF}$

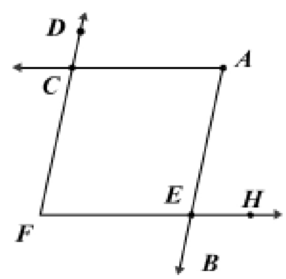
$\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{FH}$

Tesis: $\hat{A} \cong \hat{F}$

Figura 15.8

Demostración

$C\widehat{E}D \cong \hat{A}$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas ($\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{FD}$). Por la misma razón anterior $C\widehat{E}D \cong \hat{F}$, ya que $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{FH}$. Por transitividad se concluye que $\hat{A} \cong \hat{F}$.



b. Hipótesis: $D\widehat{F}H$ y $E\widehat{A}C$ con

$\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{FH}$

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{FD}$

Tesis: $\hat{A} \cong \hat{F}$

Figura 15.9

Demostración

$\hat{A} \cong A\widehat{E}H$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas $(\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{FH})$. Por ser ángulos correspondientes entre paralelas $(\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{FD})$, los ángulos $A\widehat{E}H$ y $\hat{F}$ son congruentes. Luego $\hat{A} \cong \hat{F}$ por transitividad.

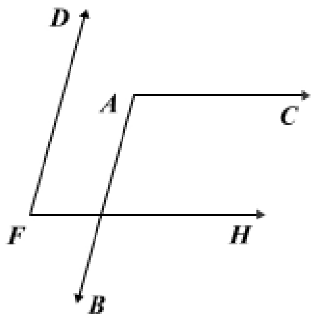


Figura 15.10

c. Hipótesis: $C\hat{A}B$ y $D\hat{F}H$ con

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{FD}$

$\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{FH}$

Tesis: $\hat{A}$ y $\hat{F}$ suplementarios

Demostración

$A\hat{B}H \cong \hat{F}$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas $(\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{FD})$; $C\hat{A}B$ y $A\hat{B}H$ son suplementarios por ser ángulos colaterales interiores entre paralelas $(\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{BH})$. Luego $\hat{A}$ y $\hat{F}$ son suplementarios.

Ejemplo 15.1.5

En forma similar a la del ejemplo 15.1.4 analice la proposición: "si dos ángulos tienen sus lados perpendiculares, entonces los ángulos son congruentes o suplementarios".

15.2 Ángulos en figuras geométricas

Teorema 15.2.1

En todo triángulo la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes (figura 15.11).

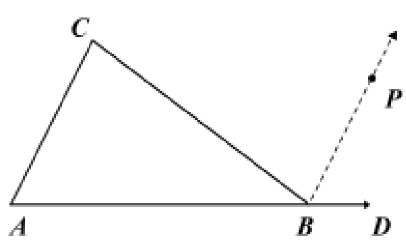


Figura 15.11

Hipótesis: ΔABC con $C\hat{B}D$ exterior

Tesis: $m(C\hat{B}D) = m(\hat{C}) + m(\hat{A})$

Demostración

Trazamos $\overrightarrow{BP} \parallel \overrightarrow{AC}$ como construcción auxiliar

$C\hat{B}P \cong \hat{C}$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas
$D\hat{B}P \cong \hat{A}$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas
$m(C\hat{B}D) = m(C\hat{B}P) + m(D\hat{B}P)$ por adición de ángulos

Luego $m(C\hat{B}D) = m(\hat{C}) + m(\hat{A})$

Teorema 15.2.2: Medida de los ángulos de un triángulo

En todo triángulo la suma de las medidas de los ángulos interiores es 180º (figura 15.12).

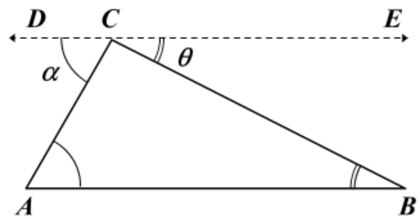


Figura 15.12

Hipótesis: ΔABC

Tesis: $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180º$

Demostración
Por cualquiera de los vértices se traza una recta paralela al lado opuesto. Sea $\overleftrightarrow{DCE} \parallel \overline{AB}$.

$\hat{\alpha} \cong \hat{A}$ y $\hat{\theta} \cong \hat{B}$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas $(\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DCE})$.

$m(\hat{\alpha}) + m(\hat{C}) + m(\hat{\theta}) = 180º$ porque $D\hat{C}E$ es rectilíneo $(D - C - E)$. Sustituyendo las congruencias podemos concluir que $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) + m(\hat{B}) = 180º$.

Corolario 15.2.1
En todo triángulo no puede haber más de un ángulo interior cuya medida sea mayor o igual a 90º.

Corolario 15.2.2
Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

Corolario 15.2.3
Cada ángulo interior de un triángulo equilátero mide 60º.

Corolario 15.2.4
Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son agudos.

Corolario 15.2.5
Si dos triángulos tienen dos ángulos congruentes, sus terceros ángulos son congruentes.

Corolario 15.2.6
La suma de las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360º.

Corolario 15.2.7
La suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n-2)\,180º$.

Desde un vértice se trazan las posibles diagonales y se forman $(n-2)$ triángulos cuya suma de ángulos interiores es igual a la suma de los del polígono. Queda como ejercicio determinar que la suma de la medida de los ángulos exteriores de un polígono de n lados es 360º.

Ejercicios

Módulos 14 y 15

1. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

- Dos rectas paralelas determinana un plano.
- Dos rectas perpendiculares determinan un plano.
- Por un punto de una recta puede trazarse cualquier número de rectas.
- Por un punto exterior de una recta se puede trazar cualquier número de rectas paralelas a la recta.
- Desde un punto que no esté en una recta se puede trazar más de una recta perpendicular a la recta.
- Los ángulos alternos internos son congruentes.
- Los ángulos colaterales son congruentes.
- Los ángulos alternos externos entre paralelas son suplementarios.
- Si dos ángulos colaterales interiores son congruentes, la transversal es perpendicular a las paralelas.
- Si dos rectas son perpendiculares a una tercera recta, entonces son perpendiculares entre sí.
- Si dos rectas son paralelas a una tercera recta, entonces son paralelas entre sí.
- Los ángulos alternos internos entre paralelas son suplementarios.
- Hay ángulos correspondientes suplementarios.
- Si $\ell \parallel m$, $n \perp \ell$, $s \perp m$, entonces $n \parallel s$.

2. Sea la recta *XOX'*. A partir de *O* y en un mismo semiplano se toman los rayos *OA* y *OB* lo mismo que las bisectrices de los ángulos *XOA, AOB* y *BOX'*. Halle la medida de los ángulos si la bisectriz del ángulo *AOB* es perpendicular a $\overleftrightarrow{X'OX}$ y las bisectrices de los ángulos externos forman un ángulo cuya medida es 100º.

3. En la figura 1 se tiene:

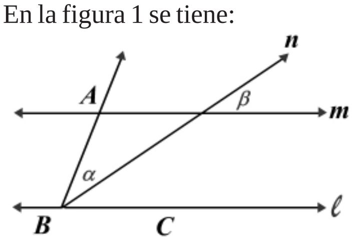


Figura 1

Hipótesis: $\ell \parallel m$

$\alpha = \beta$

Tesis: n bisectriz de $A\hat{B}C$

4. En la figura 2 se tiene:

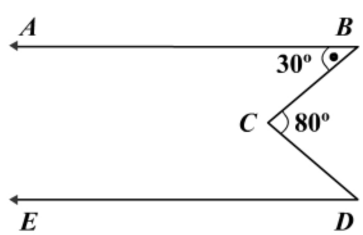


Figura 2

Hipótesis: $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{DE}$

$m(\hat{B}) = 30º$

$m(\hat{C}) = 80º$

Tesis: $m(\hat{D}) = ?$

5. En la figura 3 se tiene:

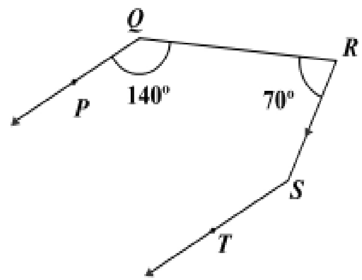


Figura 3

Hipótesis: $\overrightarrow{QP} \parallel \overrightarrow{ST}$

$m\ (P\widehat{Q}R) = 140º$

$m\,(\hat{R}) = 70º$

Tesis: $m\,(\hat{S}) = ?$

6. En la figura 4 se tiene:

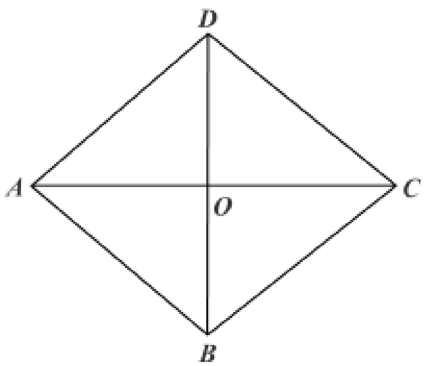


Figura 4

Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$

$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$

Tesis: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

$\overline{DC} \parallel \overline{AB};\ \overline{BC} \parallel \overline{AD}$

7. En la figura 5 se tiene:

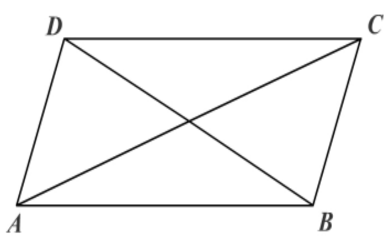


Figura 5

Hipótesis: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Tesis: $\overline{BD} \cong \overline{AC}$

$\overline{BO} = \overline{DO}$

$\overline{OC} = \overline{OA}$

8. En la figura 6 se tiene:

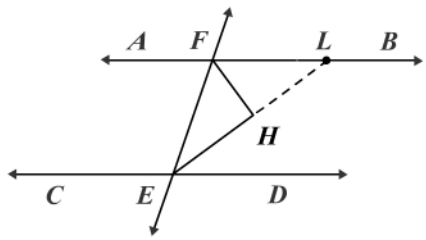


Figura 6

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{EH}$ bisectriz de $F\hat{E}D$

$\overrightarrow{FH}$ bisectriz de $E\hat{F}L$

Tesis: $\overrightarrow{EH} \perp \overrightarrow{FH}$

9. En la figura 7 se tiene:

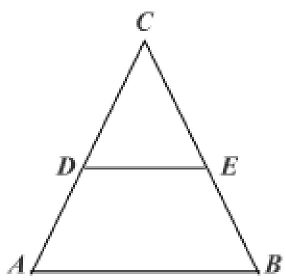


Figura 7

a. Hipótesis: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$; $\overline{DC} \cong \overline{CE}$

Tesis: $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

b. Hipótesis: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$; $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

Tesis: $\overline{CD} \cong \overline{CE}$

c. Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$; $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

Tesis: $\overline{DE} \cong \overline{DC}$

10. En la figura 8 se tiene:

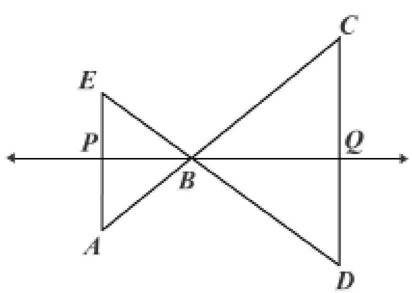


Figura 8

Hipótesis: $P - B - Q$

P punto medio de $\overline{EA}$

Q punto medio de $\overline{CD}$

$BE = BA$, $BC = BD$

Tesis: $\overline{EA} \parallel \overline{CD}$; $\overline{PQ} \perp \overline{EA}$

$\overline{PQ} \perp \overline{CD}$

11. Demuestre el corolario 15.1.1.

12. Demuestre el corolario 15.1.2.

13. Demuestre el teorema 15.1.4.

14. Demuestre el teorema 15.1.5.

15. Demuestre el teorema 15.1.6.

16. Demuestre las siguientes proposiciones.

a. Las bisectrices de dos ángulos de lados perpendiculares son perpendiculares o paralelas.
b. La bisectriz exterior del ángulo del vértice de un triángulo isósceles es paralela a la base.
c. Si la bisectriz exterior de un ángulo de un triángulo es paralela al lado opuesto al vértice, el triángulo es isósceles.
d. Las bisectrices de dos ángulos de lados paralelos son perpendiculares o paralelas.

17. ¿Cuánto mide cada ángulo de un triángulo si el mayor mide tres veces lo que mide el menor y éste es la mitad del tercer ángulo?

18. Las bisectrices de dos ángulos interiores de un triángulo se cortan formando un ángulo de 120º. ¿Cuál es la medida del tercer ángulo del triángulo?

19. Uno de los ángulos de un triángulo isósceles mide tres veces lo que mide el otro. ¿Cuál es la medida de cada uno de los ángulos?

20. Si la medida de un ángulo de un triángulo isósceles es el doble de la medida de otro ángulo, ¿cuál es la medida de cada ángulo?

21. En un triángulo, un ángulo exterior mide 110º y el mayor de los interiores mide 70º. ¿Cuánto mide cada uno de los otros ángulos interiores?

22. La medida de un ángulo de un triángulo es cinco veces la medida de un segundo ángulo, y la medida del ángulo exterior del tercer vértice es 100º. ¿Cuánto mide cada ángulo?

23. Las medidas de los ángulos de un triángulo están en la relación 1: 2: 3. Encuentre la medida de cada ángulo.

24. Halle las medidas de cada ángulo interior de un cuadrilátero si:

a. Los ángulos internos están representados por $x - 10$, $x - 20$, $x + 20$, $3x + 50$.
b. Los ángulos externos están en la relación 1: 2: 5: 7.

25. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo tienen las siguientes medidas: $m(B) = 24º$, $m(C) = 66º$. Halle las medidas del ángulo formado por la altura y la mediana trazada desde A.

26. En un triángulo rectángulo en A, $m(\hat{B}) = \dfrac{2}{5}\, m(\hat{A})$.

a. Halle las medidas de los ángulos determinados por la altura desde A.
b. Halle la medida de los ángulos determinados sobre la hipotenusa por la mediana y la bisectriz desde A.

27. El ángulo del vértice de un triángulo isósceles mide 82º. Se trazan las bisectrices interiores de los ángulos de la base y la bisectriz exterior de uno de ellos. Halle la medida del ángulo entre las bisectrices interiores y entre una bisectriz interior y la exterior.

28. Identifique el triángulo cuyos ángulos están:

a. Representados por $2x + 10$, $4x - 40$, $3x - 15$.
b. Representados por $2x + 18$, $4x - 14$, $5x$.
c. En la proporción 2: 4: 6.

Capítulo 4: Cuadriláteros

d. Así: uno de ellos mide 30º y el mayor de los otros dos mide 10º más que seis veces la medida del más pequeño.

29. Calcule el número de lados de un polígono regular si cada ángulo interno mide:

a. 60º b. 90º c. 120º d. 150º e. 160º f. 175º

30. Calcule el número de lados de un polígono regular si cada uno de sus ángulos externos mide:

a. 40º b. 60º c. 120º d. 150º

31. Halle la medida de cada ángulo externo de un polígono regular de:

a. 6 lados b. 12 lados c. 18 lados d. 24 lados

32. Halle la medida de cada ángulo interior de los polígonos del ejercicio anterior.

33. Cuál es el número de lados de un polígono si la suma de las medidas de sus ángulos internos es:

a. 1.080º b. 1.260º c. 4.500º

34. Halle la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono de:

a. 11 lados b. 32 lados c. 24 lados.

35. Determine la medida de cada ángulo en la figura 9.

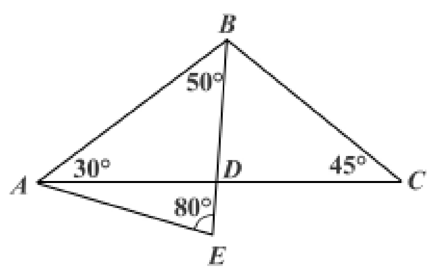


Figura 9

36. En la figura 10, el segmento más corto es: ____

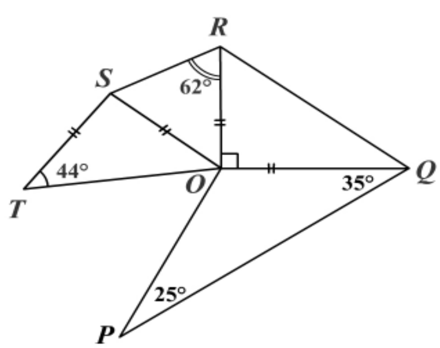


Figura 10

37. En la figura 11 demuestre que $\beta + \theta = \alpha + \lambda$. (Sugerencia: trace $\overline{NQ}$.)

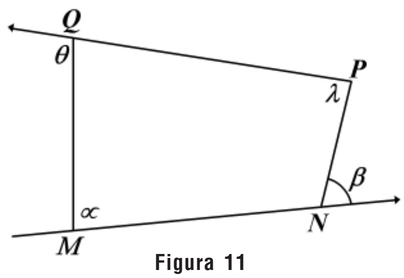


Figura 11

38. En la figura 12:

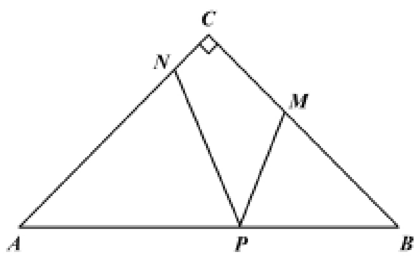


Figura 12

Hipótesis: $\triangle ABC$ con

$\overline{CA} \perp \overline{CB}$

$BM = BP$

$AP = AN$

Tesis: $m\,(N\hat{P}M) = 45^\circ$

39. Demuestre que una recta paralela a la base de un triángulo isósceles y que interseca a los otros lados en puntos diferentes, determina otro triángulo isósceles.

40. Desde el punto medio de uno de los lados de un triángulo se trazan segmentos perpendiculares a los otros lados. Si los segmentos perpendiculares son congruentes, demuestre que el triángulo es isósceles.

41. Demuestre que si en un triángulo una bisectriz es mediana, el triángulo es isósceles.

42. Demuestre que si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, las bisectrices de dos ángulos correspondientes cualesquiera son paralelas.

43. En el $\triangle ABC$, la bisectriz del ángulo A interseca a $\overline{BC}$ en M, y la mediatriz de $\overline{AM}$ interseca a $\overline{AC}$ en N. Demuestre que $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$.

44. En el $\triangle ABC$, $m\,(\hat{B}) = 58^\circ$ y $m\,(\hat{C}) = 70^\circ$. Halle la medida de los siguientes ángulos:

a. El ángulo formado por las bisectrices interiores $\overline{BD}$ y $\overline{CF}$.

b. El ángulo de las bisectrices exteriores $\overline{AO}$ y $\overline{OC}$.

c. El ángulo formado por la bisectriz $\overline{BD}$ y la altura $\overline{BH}$.

d. El ángulo entre las alturas desde B y A.

Capítulo 4: Cuadriláteros

45. En un triángulo rectángulo en A, $m(\hat{B}) = 2m(\hat{C})$ y $\overline{AH}$ es la altura relativa a $\overline{BC}$. Se da $A - B - D$ tal que $\overline{BD} \cong \overline{BH}$ y se traza $\overline{DH}$ que corta a $\overline{AC}$ en O. Demuestre que $OC = OH = OA$.

Módulo 16

Propiedades de cuadriláteros

Bernhard Riemann

(1826-1866). Matemático alemán nacido en Breselenz.

Contenidos del módulo

16.1 Cuadriláteros en el plano

Objetivos del módulo

1. Identificar los elementos de un cuadrilátero.
2. Clasificar los cuadriláteros según los lados y los ángulos.
3. Demostrar algunas propiedades de los paralelogramos y los trapecios.
4. Establecer las condiciones bajo las cuales un cuadrilátero es un paralelogramo.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es un cuadrilátero?
2. ¿Cómo se clasifican los cuadriláteros?
3. ¿Qué propiedades tienen los paralelogramos?
4. ¿Cuándo un cuadrilátero es un paralelogramo?
5. ¿Qué propiedades tiene un trapecio isósceles?

Introducción

En este módulo se estudian los diferentes cuadriláteros y las propiedades que tienen, y se analizan las condiciones mínimas que debe cumplir un cuadrilátero para ser paralelogramo.

Vea el módulo 16 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

16.1 Cuadriláteros en el plano

Definición 16.1.1

Un cuadrilátero es un polígono (convexo) de cuatro lados.

En la figura 16.1 *A*, *B*, *C* y *D* son los vértices, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ son los lados, $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ y $\hat{D}$ son los ángulos interiores del cuadrilátero y $\overline{DB}$ y $\overline{AC}$ son las diagonales.

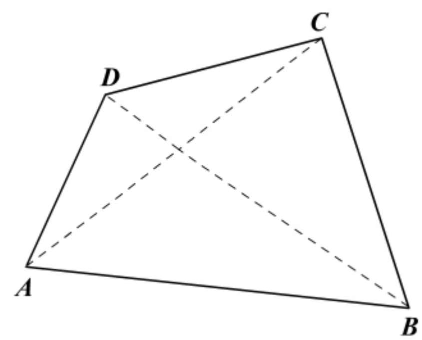


Figura 16.1

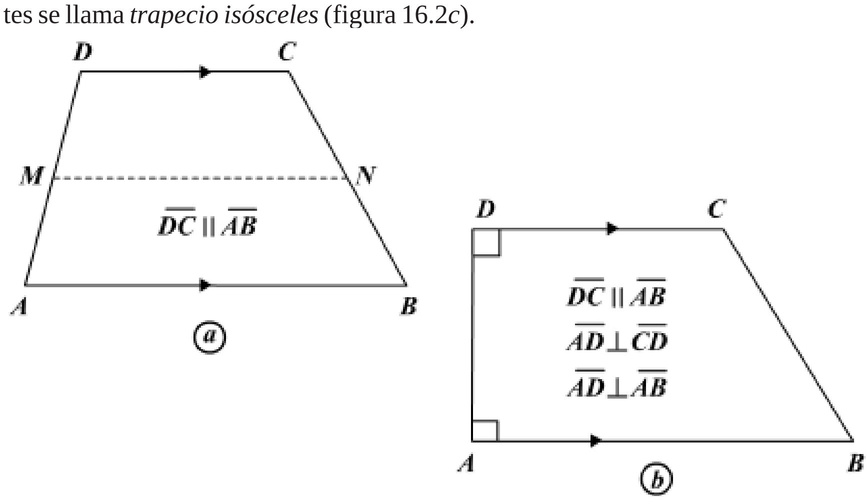
El perímetro del cuadrilátero, denotado $2p$, es la suma de las medidas de los lados, es decir: $2p = AB + BC + CD + DA$.

Los cuadriláteros reciben diferentes nombres de acuerdo con algunas propiedades de sus lados o ángulos.

Un cuadrilátero que tiene por lo menos un par de lados paralelos se llama *trapecio* (figura 16.2*a*).

Un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos y uno de los otros lados es perpendicular a los lados paralelos se llama *trapecio rectángulo* (figura 16.2*b*).

Un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos y los otros dos lados congruentes se llama *trapecio isósceles* (figura 16.2*c*).



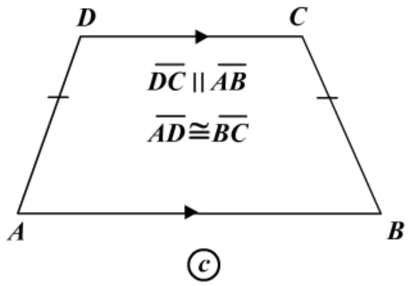


Figura 16.2

En todo trapecio los lados paralelos se llaman *bases del trapecio*; los ángulos cuyos vértices coinciden con los vértices de las bases se llaman *ángulos de las bases.* El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos se llama *base media* o *mediana del trapecio*. El segmento *MN* en la figura 16.2*a* es la mediana o base media.

Un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos se llama *paralelogramo* (figura 16.3*a*).

Un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos y sus ángulos interiores congruentes se llama *rectángulo* (figura 16.3*b*).

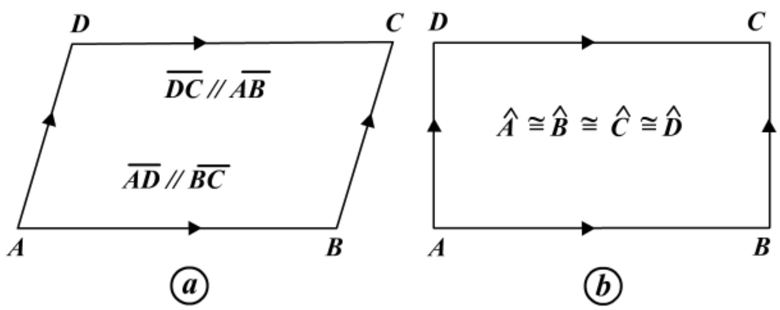


Figura 16.3

Un cuadrilátero que tiene sus lados congruentes se llama *rombo* (figura 16.4*a*).

Un cuadrilátero que tiene sus ángulos congruentes y sus lados congruentes se llama *cuadrado* (figura 16.4*b*).

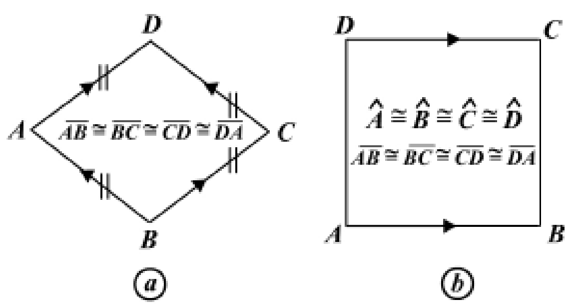


Figura 16.4

Bernhard Riemann

Riemann elaboró un sistema de geometría que contribuyó a desarrollar la física teórica moderna. La importancia de su geometría radica en el uso y la extensión de la geometría euclidiana y de la geometría de superficies, que lleva a muchas otras geometrías diferenciales generalizadas. Lo más importante de estos trabajos fue que hicieron posible elaborar una aplicación geométrica para algunas grandes abstracciones del análisis de tensores, que condujeron a algunos de los conceptos que más tarde utilizó Albert Einstein en su teoría de la relatividad. La geometría de Riemann también se necesita para abordar la electricidad y el magnetismo en la teoría de la relatividad general. Clarificó el concepto de integral, al definir lo que actualmente se conoce como *Integral de Riemann.* Su aportación más conocida fue su geometría no euclidiana, que expuso en forma detallada en su célebre obra *Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría.* Esta geometría se sigue si se considera la superficie de una esfera y se restringen las figuras a esa superficie.

Teorema 16.1.1

Los segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas son congruentes (figura 16.5).

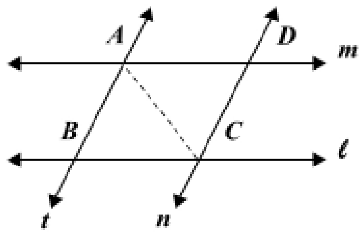


Figura 16.5

Hipótesis: t transversal a ℓ y m en B y A
n transversal a ℓ y m en C y D
$t \parallel n$, $m \parallel \ell$

Tesis: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$; $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

Demostración

De la hipótesis se concluye que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. ¿Por qué?

Trazamos la diagonal $\overline{AC}$.

$D\hat{A}C \cong A\hat{C}B$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas ($\overline{AD} \parallel \overline{BC}$) y $B\hat{A}C \cong A\hat{C}D$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$). Entonces $\Delta ACD \cong \Delta CAB$ por A-L-A, lo cual implica que $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ por ser lados correspondientes en triángulos congruentes.

Corolario 16.1.1
Dos rectas paralelas equidistan en todos sus puntos.

Corolario 16.1.2 (recíproco del corolario 16.1.1)
Si dos rectas equidistan en todos sus puntos, son paralelas.

Teorema 16.1.2

En todo paralelogramo una cualquiera de las diagonales determina dos triángulos congruentes (figura 16.6).

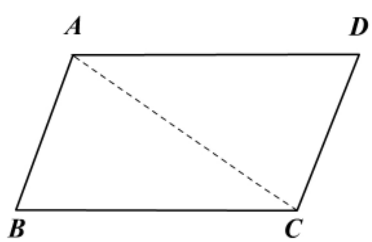


Figura 16.6

Hipótesis: $ABCD$ es paralelogramo
$\overline{AC}$ diagonal

Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

Demostración

$\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, por la definición del paralelogramo $ABCD$.

$D\hat{A}C \cong B\hat{C}A$ por ser ángulos alternos internos entre paralelos ($\overline{AD} \parallel \overline{BC}$). Por la misma razón $B\hat{A}C \cong D\hat{C}A$ y los dos triángulos tienen a AC común. Luego $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ por A-L-A.

Teorema 16.1.3

Todo paralelogramo tiene los lados opuestos congruentes.

En efecto, de la congruencia de triángulos del teorema 16.1.2 se concluye que $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

Teorema 16.1.4

En todo paralelogramo los lados opuestos son paralelos y congruentes.

En efecto, de la definición de paralelogramo los lados opuestos son paralelos, y del teorema 16.1.2 son congruentes.

Teorema 16.1.5

Todo paralelogramo tiene los ángulos opuestos congruentes.

En efecto, de la congruencia de los triángulos del teorema 16.1.2 se tiene que $\hat{D} \cong \hat{B}$, y por la adición de los ángulos $D\hat{C}A \cong C\hat{A}B$ y $B\hat{C}A \cong D\hat{A}C$ se obtiene $D\hat{A}B \cong D\hat{C}B$.

Teorema 16.1.6

En todo paralelogramo las diagonales se intersecan en sus puntos medios (figura 16.7).

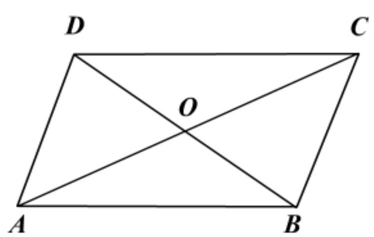


Figura 16.7

Hipótesis: $ABCD$ es paralelogramo

$\overline{AC}$, $\overline{BD}$ diagonales

$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$

Tesis: $\overline{AO} \cong \overline{OC}$; $\overline{BO} \cong \overline{OD}$

Demostración

Por la definición de paralelogramo $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y este paralelismo implica que $D\hat{C}A \cong B\hat{A}C$ y $C\hat{D}B \cong D\hat{B}A$ (¿por qué?), y según el teorema 16.1.3 se tiene que $\overline{DC} \cong \overline{AB}$. Por tanto, $\Delta DOC \cong \Delta BOA$ por A-L-A (¿cuáles?) y concluimos de esta congruencia que $\overline{AO} \cong \overline{OC}$ y $\overline{BO} \cong \overline{OD}$.

Los teoremas anteriores se refieren a las propiedades de los elementos en un paralelogramo. Veamos ahora las condiciones mínimas (suficientes) que debe cumplir un cuadrilátero para ser un paralelogramo.

Teorema 16.1.7 (recíproco del teorema 16.1.3)

Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, el cuadrilátero es un paralelogramo (figura 16.8).

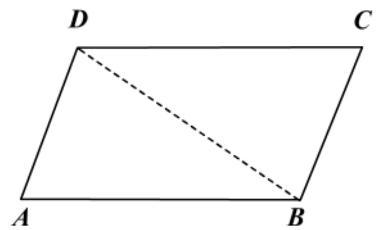


Figura 16.8

Hipótesis: $ABCD$ cuadrilátero

$\overline{DC} \cong \overline{AB}$

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$

Tesis: $ABCD$ es un paralelogramo

Demostración

Trazamos la diagonal $\overline{BD}$. Como $\overline{DC} \cong \overline{AB}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (hipótesis) y $\overline{DB}$ es común, entonces $\Delta DCB \cong \Delta BAD$ por L-L-L; de esta congruencia concluimos que $C\widehat{D}B \cong A\widehat{B}D$ y $C\widehat{B}D \cong A\widehat{D}B$.

Los ángulos anteriores no sólo son congruentes, sino también alternos internos, lo cual implica que $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, según el teorema 15.1.1.

Podemos entonces concluir que $ABCD$ es un paralelogramo por tener sus lados opuestos paralelos (definición).

Teorema 16.1.8 (recíproco del teorema 16.1.5)

Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, el cuadrilátero es un paralelogramo (figura 16.9).

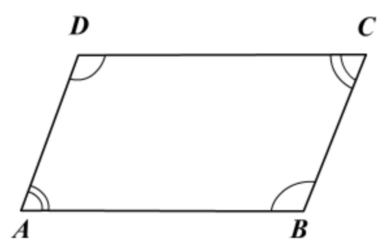


Figura 16.9

Hipótesis: $ABCD$ cuadrilátero

$\hat{A} = \hat{C}$

$\hat{D} \cong \hat{B}$

Tesis: $ABCD$ es un paralelogramo

Demostración

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360º. Entonces: $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 360º$.

Como $\hat{A} \cong \hat{C}$ y $\hat{D} \cong \hat{B}$, entonces $m(\hat{A}) = m(\hat{C})$ y $m(\hat{D}) = m(\hat{B})$, y si reemplazamos en la ecuación anterior obtenemos: $2m(\hat{A}) + 2m(\hat{D}) = 360º$.

Simplificando: $m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180º$. Luego $\hat{A}$ y $\hat{D}$ son ángulos colaterales interiores suplementarios y $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$, según el corolario 15.1.1.

Si al hacer las sustituciones correspondientes en la primera ecuación obtenemos $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180º$, entonces por ser $\hat{A}$ y $\hat{B}$ colaterales interiores suplementarios $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, según el corolario 15.1.1.

Como $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, tenemos que *ABCD* es un paralelogramo (definición).

Teorema 16.1.9 (recíproco del teorema 16.1.6)

Si en un cuadrilátero las diagonales se intersecan en sus puntos medios, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. La demostración se deja como ejercicio.

Teorema 16.1.10

Si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos y congruentes, entonces es un paralelogramo (figura 16.10).

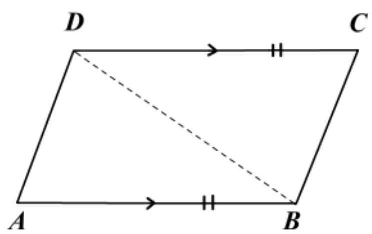


Figura 16.10

Hipótesis: cuadrilátero *ABCD*
$\overline{DC} \parallel \overline{AB}$
$\overline{DC} \cong \overline{AB}$
Tesis: *ABCD* es un paralelogramo

Demostración

Trazamos la diagonal $\overline{DB}$.

$\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{DC} \cong \overline{AB}$, de la hipótesis.

$C\widehat{D}B \cong A\widehat{B}D$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas. Luego $\Delta CDB \cong \Delta ABD$ por L-A-L, y por ángulos correspondientes en triángulos congruentes $A\widehat{D}B \cong C\widehat{B}D$, lo cual implicaría que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (teorema 15.1.1) y concluimos entonces que *ABCD* es un paralelogramo por tener a $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

Teorema 16.1.11

Los ángulos de un paralelogramo cuyos vértices son los vértices consecutivos del paralelogramo son suplementarios. La demostración se deja como ejercicio.

Teorema 16.1.12

Las diagonales de un rectángulo son congruentes (figura 16.11).

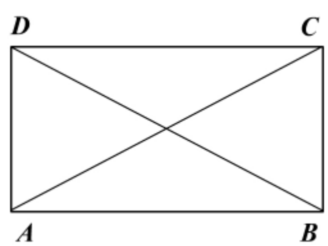


Figura 16.11

Hipótesis: *ABCD* rectángulo
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales
Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Demostración

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $D\hat{A}B \cong C\hat{B}A$ por ser $ABCD$ rectángulo.

$\Delta DAB \cong \Delta CBA$ por C-C, luego $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Teorema 16.1.13

Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, el paralelogramo es un rectángulo. La demostración se deja como ejercicio.

Teorema 16.1.14

Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí y bisectrices de los ángulos correspondientes (figura 16.12).

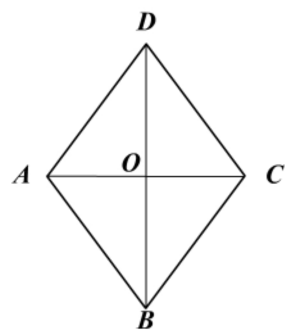


Figura 16.12

Hipótesis: rombo $ABCD$

$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales que se intersecan en O

Tesis: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

$\overline{AC}$ bisectriz de $\hat{A}$ y $\hat{C}$

$\overline{BD}$ bisectriz de $\hat{D}$ y $\hat{B}$

Demostración

$\overline{AD} \cong \overline{DC} \cong \overline{CB} \cong \overline{BA}$ porque $ABCD$ es un rombo.

$\Delta ADC \cong \Delta ABC$ por L-L-L, luego $D\hat{A}C \cong B\hat{A}C$ y $D\hat{C}A \cong B\hat{C}A$ por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes. Por tanto, $\overline{AC}$ es bisectriz de $\hat{A}$ y $\hat{C}$. En forma similar se demuestra que $\overline{BD}$ es bisectriz de $\hat{D}$ y $\hat{B}$.

Como $D-O-B$ y $A-O-C$ (hipótesis) y las bisectrices a la base de triángulos isósceles son alturas, entonces $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Teorema 16.1.15

Las diagonales de un cuadrado son congruentes, se bisecan, son perpendiculares y bisectrices. La demostración se deja como ejercicio.

Teorema 16.1.16

En todo trapecio isósceles los ángulos que tienen por vértices los extremos de las bases correspondientes son congruentes. Las diagonales son congruentes. El punto de intersección de las prolongaciones de los lados no paralelos, los puntos medios de las bases y el punto de intersección de las diagonales son puntos colineales (figura 16.13).

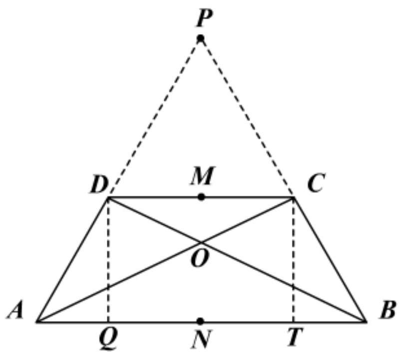


Figura 16.13

Hipótesis: trapecio $ABCD$

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AD} \cong \overline{CB}$

$\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{P\}$

$AC \cap BD = \{O\}$.

Diagonales

M: punto medio de $\overline{DC}$

N: punto medio de $\overline{AB}$

Tesis: $D\hat{A}B \cong C\hat{B}A$

$A\hat{D}C \cong D\hat{C}B$

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

P, M, O, N colineales

Demostración

Se espera que el lector complete la demostración de acuerdo con las siguientes sugerencias:

1. Trace las alturas del trapecio desde D y C y demuestre que ellas son congruentes.

2. Los puntos P, M, O, N son colineales si y sólo si tienen la misma propiedad. Demuestre que ellos pertenecen a la mediatriz de $\overline{AB}$ (equidistan de A y B).

Ejemplo 16.1.1

Demuestre que las bisectrices de los ángulos opuestos de un paralelogramo son paralelas (figura 16.14).

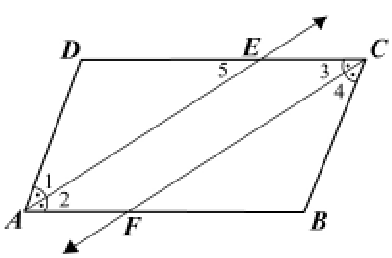


Figura 16.14

Hipótesis: paralelogramo $ABCD$

$\overrightarrow{AE}$ bisectriz de $\hat{A}$

$\overrightarrow{CF}$ bisectriz de $\hat{C}$

Tesis: $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{CF}$

Demostración

Por ser $ABCD$ un paralelogramo podemos afirmar que $DC \parallel AB$ y $\hat{A} \cong \hat{C}$ (¿por qué?).

$\hat{A}_1 \cong \hat{A}_2 \cong \hat{C}_3 \cong \hat{C}_4$ por ser $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{CF}$ bisectrices de ángulos congruentes ($\hat{A} \cong \hat{C}$).

$\hat{E}_5 \cong \hat{A}_2$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas ($\overline{DCE} \parallel \overline{AB}$), y por transitividad, entonces $\hat{E}_5 \cong \hat{C}_3$. Luego $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{CF}$ por el teorema 15.1.2.

Ejemplo 16.1.2

En la figura 16.15:

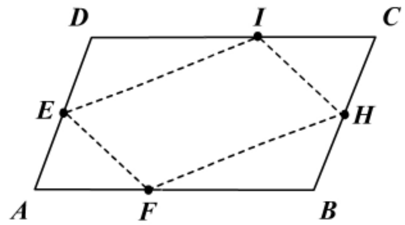


Figura 16.15

Hipótesis: paralelogramo $ABCD$

$\overline{DE} \cong \overline{BH}$

$\overline{AF} \cong \overline{CI}$

Tesis: $EFHI$ es un paralelogramo

Demostración

Como $\overline{DC} \cong \overline{AB}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ ($ABCD$ es un paralelogramo), y de la hipótesis $\overline{DE} \cong \overline{BH}$ y $\overline{AF} \cong \overline{CI}$, entonces $\overline{AE} \cong \overline{CH}$ y $\overline{DI} \cong \overline{FB}$ (sustracción de segmentos). Además $\hat{D} \cong \hat{B}$ y $\hat{A} \cong \hat{C}$ (¿por qué?)

De lo anterior tenemos que $\Delta EDI \cong \Delta HBF$ y $\Delta EAF \cong \Delta HCI$ por L-A-L. Por tanto, $\overline{EI} \cong \overline{FH}$ y $\overline{EF} \cong \overline{HI}$, luego $EFHI$ es un paralelogramo (teorema 16.1.7).

Ejemplo 16.1.3

Desde un punto cualquiera de la base de un triángulo isósceles se trazan segmentos perpendiculares a los lados congruentes. Demuestre que la suma de las medidas de estos segmentos es una constante (la altura es una constante) (figura 16.16).

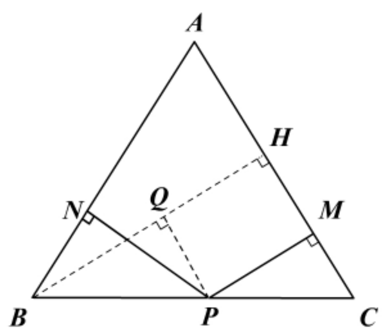


Figura 16.16

Hipótesis: ΔABC isósceles

$\overline{AB} \cong \overline{AC}$

$P \in \overline{BC}$

$\overline{PM} \perp \overline{AC}$, $\overline{PN} \perp \overline{AB}$

Tesis: $PN + PM = \text{cte}$

Demostración

Trazamos $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ ($\overline{BH}$ altura) y $\overline{PQ} \perp \overline{BH}$.

$\overline{QH} = \overline{PM}$ por ser $QHMP$ un rectángulo.

$A\hat{B}P \cong A\hat{C}P \cong Q\hat{P}B$ (¿por qué?)

$\Delta QPB \cong \Delta NBP$ por H-A. Luego $\overline{BQ} \cong \overline{PN}$ y $BH = BQ + QH = PN + PM = h = \text{cte}$.

Ejemplo 16.1.4

Los ángulos opuestos de un paralelogramo tienen por medida $(x + 40)^\circ$ y $(3x - 20)^\circ$. Halle la medida (en grados) de cada uno de los ángulos del paralelogramo.

Solución

Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes. Por tanto $x + 40^\circ = 3x - 20^\circ \Rightarrow 60^\circ = 2x \therefore x = 30^\circ$. Entonces cada uno de estos ángulos opuestos mide 70º. Cada uno de los otros dos ángulos mide (360º – 140º)/2 = 110º (¿por qué?).

Ejemplo 16.1.5

Las diagonales $\overline{DB}$ y $\overline{AC}$ de un paralelogramo se cortan en O. Si $OA = 15$, $OC = x + 2y$, $OB = x$, $OD = 3y - 5$, ¿cuánto mide cada diagonal?

Solución

$$\left.\begin{aligned} OA = OC &\Rightarrow 15 = x + 2y \\ OB = OD &\Rightarrow x = 3y - 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y &= 4 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Luego: $AC = 15 + x + 2y \Rightarrow AC = 30$

$DB = x + 3y - 5 \Rightarrow DB = 14$

Ejercicios
Módulo 16

1. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa.

- Todo cuadrilátero equilátero es un cuadrado.
- Todo cuadrilátero equilátero es un rombo.
- Un cuadrilátero equiángulo es un cuadrado.
- Un rectángulo es un cuadrilátero equiángulo.
- Un rombo es un trapecio equilátero.
- Todo paralelogramo equiángulo es un cuadrado.
- Todo rombo equiángulo es un cuadrado.
- Todo rectángulo equilátero es un rombo.
- Un cuadrilátero que tenga dos lados paralelos y los otros dos congruentes es un paralelogramo.
- Si una diagonal de un cuadrilátero determina dos triángulos congruentes, el cuadrilátero es un paralelogramo.
- Un cuadrilátero que tenga tres ángulos rectos es un paralelogramo.
- Las diagonales de un cuadrado son mediatrices entre sí.
- Las diagonales de un paralelogramo son congruentes.
- Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, los demás son rectos.
- Las diagonales de un cuadrilátero se cortan en sus puntos medios.
- Los lados no paralelos de un trapecio isósceles forman ángulos congruentes con las bases.
- Si un cuadrilátero tiene dos ángulos congruentes es un trapecio.
- Las diagonales de un rectángulo son bisectrices.
- Las bisectrices de dos ángulos “adyacentes” de un rectángulo son perpendiculares.
- Las bisectrices de dos ángulos “adyacentes” de un rombo son perpendiculares.
- Las bisectrices de dos ángulos “adyacentes” de un paralelogramo son perpendiculares.
- Las bisectrices de dos ángulos adyacentes” de un cuadrado forman triángulos isósceles.

2. Halle las medidas de cada uno de los ángulos de un paralelogramo *ABCD* si:

   a. La medida de uno de ellos es 40º.

   b. $m(\hat{A}) = 2m(\hat{B})$.

   c. Dos ángulos adyacentes miden $x + 30º$ y $2x – 50º$.

3. Halle la medida de cada uno de los ángulos de un trapecio *ABCD* con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ si:

   a. $m(\hat{A}) = x+10,\ m(\hat{B}) = 80º,\ m(\hat{C}) = y,\ m(\hat{D}) = 2x-5.$

   b. $AD = BC,\ m(\hat{A}) = 5x,\ m(\hat{B}) = 2x+30,\ m(\hat{C}) = y.$

   c. $AD = BC,\ m(\hat{A}) = y,\ m(\hat{B}) = 2x,\ m(\hat{C}) = 3x.$

   d. $AD = BC,\ m(\hat{A}) = 4x-25,\ m(\hat{B}) = 2x+15,\ m(\hat{D}) = 2y.$

4. *ABCD* es un rombo. Halle x, y si:

a. $m\left(\hat{C}\right) = 60^{\circ}$, $BC = 30$, $BD = y$, $CD = 3x - 12$.

b. $m\left(C\hat{B}D\right) = 3x + 10$, $m\left(A\hat{B}D\right) = 5x - 20$, $m\left(\hat{A}\right) = y$.

c. $AD = 7x$, $AB = 3x + 10$, $BC = y$.

5. *ABCDE* es un pentágono regular. Se trazan las diagonales $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{EC}$. Halle la medida de los siguientes ángulos:

a. *ABC, AED, ECA* y *CAD*.

b. El que se forma entre $\overline{AD}$ y $\overline{EC}$.

Resuelva los siguientes ejercicios (6 a 13) de acuerdo con la figura adjunta.

6. En la figura 1:

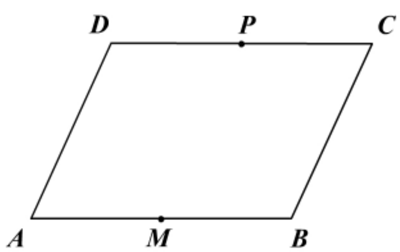


Figura 1

Hipótesis: *ABCD* paralelogramo
M punto medio de $\overline{AB}$
P punto medio de $\overline{DC}$
Tesis: *APCM* es un paralelogramo

7. En la figura 2:

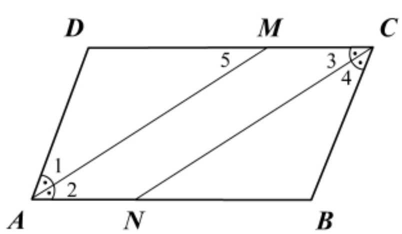


Figura 2

Hipótesis: *ABCD* paralelogramo
$\overline{AM}$ bisectriz de $\hat{A}$
$\overline{CN}$ bisectriz de $\hat{C}$
Tesis: *AMCN* es un paralelogramo

8. En la figura 3:

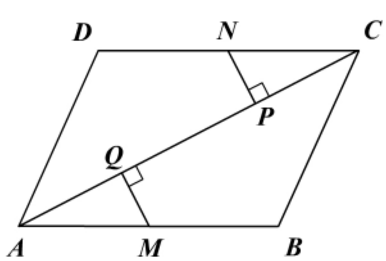


Figura 3

Hipótesis: *ABCD* paralelogramo
$\overline{AC}$ diagonal
N punto medio de $\overline{DC}$
M punto medio de $\overline{AB}$
$\overline{NP} \perp \overline{AC}$, $\overline{MQ} \perp \overline{AC}$
Tesis: *QMPN* es un paralelogramo

9. En la figura 4:

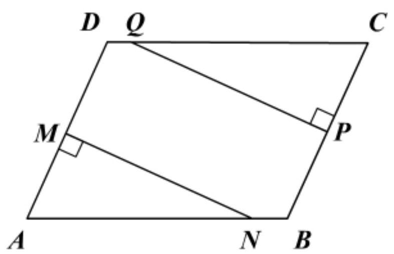


Figura 4

Hipótesis: $ABCD$ paralelogramo

M punto medio de $\overline{AD}$

P punto medio de $\overline{CB}$

$\overline{MN} \perp \overline{AD}$, $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$

Tesis: $MNPQ$ es un paralelogramo

10. En la figura 5:

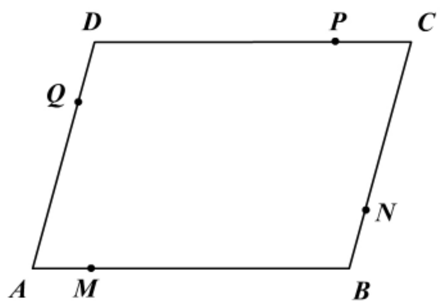


Figura 5

Hipótesis: paralelogramo $ABCD$

$AM = BN = CP = DQ$

Tesis: $MNPQ$ es un paralelogramo

11. En la figura 6:

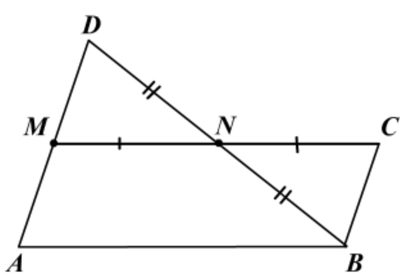


Figura 6

Hipótesis: ΔABD con M punto medio de $\overline{AD}$

N punto medio de $\overline{DB}$, $M - N - C$,

$\overline{MN} \cong \overline{NC}$

Tesis: $ABCM$ es un paralelogramo

12. En la figura 7:

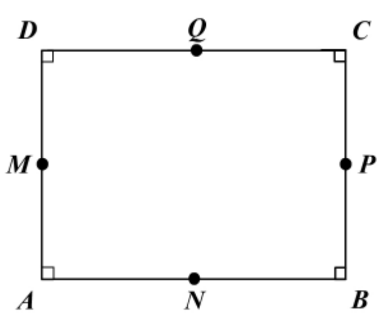


Figura 7

Hipótesis: rectángulo $ABCD$

M, N, P, Q son los puntos medios

de $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$

Tesis: $MNPQ$ es un rombo

13. En la figura 8:

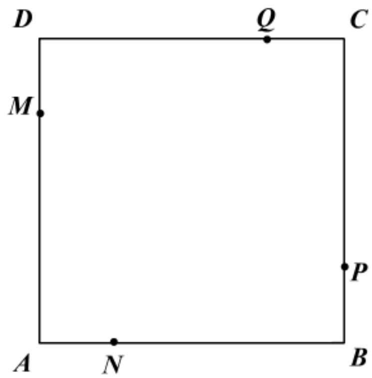


Figura 8

Hipótesis: $ABCD$ es un cuadrado
$AN = BP = CQ = DM$

Tesis: $MNPQ$ es un cuadrado

Módulo 17

Rectas y puntos notables

Leonhard Euler

(1707-1783). Matemático suizo nacido en Basilea y muerto en San Petersburgo (antes Petrogrado y luego Leningrado, en Rusia).

Contenidos del módulo

17.1 Puntos y segmentos notables en el triángulo
17.2 Transversales a rectas paralelas

Objetivos del módulo

1. Determinar las propiedades de la paralela media.
2. Establecer la relación entre la mediana y la hipotenusa.
3. Demostrar que las alturas, las medianas, las bisectrices y las mediatrices de un triángulo se cortan en puntos especiales (ortocentro, baricentro, incentro, circuncentro).
4. Analizar el teorema fundamental del paralelismo.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es la paralela media de un triángulo y qué propiedad tiene?
2. ¿Qué es la base media de un trapecio y qué propiedad tiene?
3. ¿En qué consiste el teorema mediana-hipotenusa?
4. ¿Qué relación establece el teorema 30º-60º-90º?
5.¿ Qué es el baricentro de un triángulo y qué propiedad tiene?
6. ¿Qué es el incentro de un triángulo y qué propiedad tiene?
7. ¿Qué es el circuncentro de un triángulo y qué propiedad tiene?
8. ¿Qué es el ortocentro de un triángulo?
9. ¿En qué consiste el teorema fundamental del paralelismo?
10. ¿Qué es la recta de Euler?

Introducción

Se estudian en este módulo unos segmentos (notables) en el triángulo que tienen una propiedad especial y cuya intersección determina puntos especiales, como son: baricentro, incentro, circuncentro y ortocentro. Se termina con el estudio del teorema fundamental del paralelismo y las propiedades de la base media de un trapecio.

Vea el módulo 17 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

17.1 Puntos y segmentos notables en el triángulo

En los triángulos hay segmentos y puntos llamados notables que tienen unas características especiales. Veamos:

Teorema 17.1.1

Si una recta interseca un lado de un triángulo en su punto medio y es paralela a uno de los lados, entonces interseca al tercer lado en su punto medio (figura 17.1).

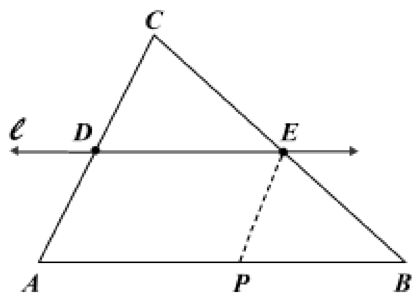


Figura 17.1

Hipótesis: ΔABC

$\ell \cap \overline{CA} = \{D\}$

$\ell \cap \overline{CB} = \{E\}$

D punto medio de $\overline{CA}$

Tesis: E punto medio de $\overline{CB}$

Demostración

Trazamos $\overline{EP} \parallel \overline{AC}$, y como $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, entonces $APED$ es un paralelogramo. Por tanto $\overline{EP} \cong \overline{AD} \cong \overline{DC}$ y $P\hat{E}B \cong A\hat{C}B,\ E\hat{P}B \cong \hat{A} \cong C\hat{D}E.$

$\Delta EPB \cong \Delta CDE$ por A-L-A, lo cual implica que $\overline{CE} \cong \overline{EB}$, luego E es punto medio de $\overline{CB}$.

Teorema 17.1.2: De la paralela media

En todo triángulo el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo al tercer lado y su medida es la mitad de la medida del tercer lado (figura 17.2).

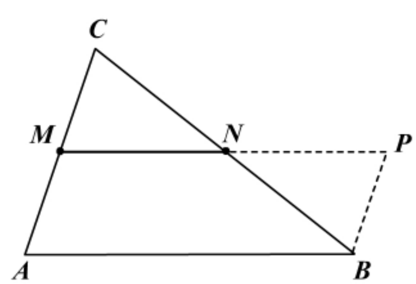


Figura 17.2

Hipótesis: ΔABC con M punto medio de $\overline{AC}$

N punto medio de $\overline{BC}$

Tesis: $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$

$MN = AB/2$

Demostración

Prolongamos $\overline{MN}$ hasta P tal que $\overline{MN} \cong \overline{NP}$ y unimos P con B.

$\Delta CNM \cong \Delta BNP$ por L-A-L ($CN = NB,\ C\hat{N}M \cong B\hat{N}P,\ MN = NP$).

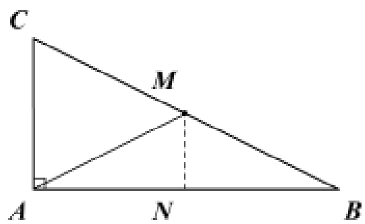
De esta congruencia se deduce que $\overline{PB} \cong \overline{CM} \cong \overline{MA}$ y $P\hat{B}N \cong \hat{C}$, lo cual implica (por el teorema 15.1.1) que $\overline{BP} \parallel \overline{AC} \parallel \overline{AM}$; $ABPM$ es entonces un paralelogramo ($\overline{AM} \cong \overline{BP}$ y $\overline{AB} \cong \overline{MP}$) y sus lados opuestos son paralelos, o sea que $\overline{MP} \parallel \overline{AB}$ y tendríamos $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$.

Como $ABPM$ es un paralelogramo, entonces $AB = MP = MN + NP = 2MN$, de donde $MN = (AB)/2$.

Nota: $\overline{MN}$ se llama *paralela media* (el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo).

Teorema 17.1.3: Mediana-Hipotenusa

El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo está a igual distancia (equidista) de los vértices del triángulo (figura 17.3).



Hipótesis: ΔABC rectángulo en A

M punto medio de $\overline{BC}$

Tesis: $MC = MB = MA$

Figura 17.3

Demostración

Trazamos por M, $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$.

$\overline{MN} \perp \overline{AB}$ (¿por qué?), y $\overline{AN} \cong \overline{NB}$ según el teorema 17.1.1. Ahora bien, el $\Delta MNA \cong \Delta MNB$ por C-C, luego $\overline{AM} \cong \overline{MB}$, y como M es un punto medio de CB concluimos que $\overline{AM} \cong \overline{MB} \cong \overline{MC}$.

El teorema anterior también se suele enunciar como: "La mediana relativa a la hipotenusa tiene por medida la mitad de la medida de la hipotenusa".

Corolario 17.1.1
La mediana relativa a la hipotenusa determina dos triángulos isósceles.

Teorema 17.1.4 (recíproco del teorema 17.1.3)

Si en un triángulo el punto medio de un lado equidista de los vértices, el triángulo es rectángulo. La demostración se deja como ejercicio.

Teorema 17.1.5: 30^0 - 60^0 - 90^0

Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de medida 30º, entonces el cateto opuesto a este ángulo tiene una medida igual a la mitad de la medida de la hipotenusa (figura 17.4).

Leonhard Euler

Euler refinó los métodos y las formas del cálculo integral y ayudó a desarrollar la teoría de las funciones trigonométricas y logarítmicas. En el campo de la geometría desarrolló conceptos básicos como los del ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo, y revolucionó la forma de abordar el estudio de las funciones trigonométricas al adoptar razones numéricas y relacionarlas con los números complejos mediante la denominada «identidad de Euler». En el campo del álgebra también consiguió importantes resultados, como el de la reducción de una ecuación cúbica a una bicuadrada y el de la determinación de la constante que lleva su nombre. Aunque su principal formación académica era la de matemático, hizo aportes destacados a la astronomía, la mecánica, la óptica y la acústica. Es el matemático más prolífico de la historia, con una obra científica compuesta por más de ochocientos tratados.

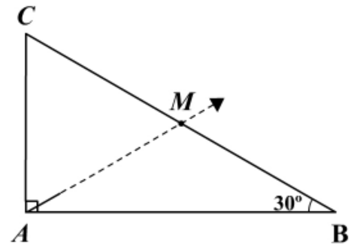


Figura 17.4

Hipótesis: ΔABC con $\hat{A}$ recto, $m\left(\hat{B}\right)=30º$

Tesis: $AC = CB/2$

Demostración

Como $m\left(\hat{A}\right)>30º$, construimos $M\hat{A}B \cong \hat{B}$ con $M \in \overline{CB}$.

Si $m\left(\hat{B}\right)=\ 30º=m\left(M\hat{A}B\right)$, entonces $m\left(\hat{C}\right)=60º=m\left(C\hat{A}M\right)$ por ser complemento de 30º y $m\left(C\widehat{M}A\right)=60º$. Luego ΔCAM es equilátero y $CA = CM = AM = MB = \frac{1}{2}CB.$

Teorema 17.1.6 (recíproco del teorema 17.1.5)

Si un cateto mide la mitad de la medida de la hipotenusa en un triángulo rectángulo, entonces el ángulo opuesto al cateto mide 30º.

La demostración se deja como ejercicio. Puede considerar el punto medio de la hipotenusa o bien construir en el ángulo recto un ángulo congruente con un ángulo agudo del triángulo rectángulo.

Teorema 17.1.7: De las medianas

Las medianas de un triángulo se intersecan en un punto (baricentro) situado sobre cada mediana a los 2/3 del vértice (figura 17.5).

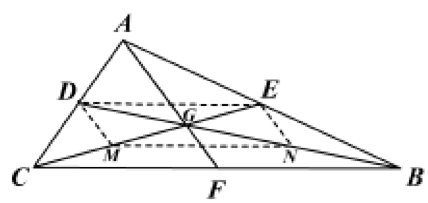


Figura 17.5

Hipótesis: ΔABC con

$\overline{BD}, \overline{CE}$ y $\overline{AF}$ medianas

Tesis: G está en $\overline{AF}, \overline{BD}$ y $\overline{CE}$

$GB = \frac{2}{3}\ BD,\ GC = 2/3\ CE$

$GA = \frac{2}{3}\ AF$

Demostración

Sea G el punto de intersección de las medianas $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$; además M y N los puntos medios de $\overline{CG}$ y $\overline{BG}$. Entonces $\overline{ED}$ y $\overline{MN}$ son paralelas medias en el

ΔABC y ΔBGC, respectivamente, luego $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ y $ED = \frac{1}{2} BC$;

$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y $MN = \frac{1}{2} BC$.

Por transitividad $\overline{ED} \parallel \overline{MN}$ y $ED = MN$, entonces *EMND* es un paralelogramo y sus diagonales se cortan en sus puntos medios; por tanto: $GD = GN = NB = \frac{1}{3} BD$ y $EG = GM = MC = \frac{1}{3} EC$. Luego $BG = \frac{2}{3} BD$ y $CG = \frac{2}{3} CE$.

Sea ahora *G´* el punto de intersección de $\overline{AF}$ y $\overline{BD}$, además *P* y *M* los puntos medios de $\overline{AF}$ y $\overline{BD}$. En forma similar a la anterior se demostraría que *PDFM* es un paralelogramo y por tanto $FG' = G'P = PA = \frac{1}{3} AF$ y $DG' = G'M = MB = \frac{1}{3} BD$.

Luego $AG' = \frac{2}{3} AF$ y $BG' = \frac{2}{3} BD$, entonces $BG' = \frac{2}{3} BD = BG$, y por tanto *G'* coincide con *G* y las tres medianas se cortan en *G*.

Teorema 17.1.8: De las mediatrices

Las mediatrices de los lados de un triángulo se intersecan en un punto (circuncentro) equidistante de los vértices del triángulo (figura 17.6).

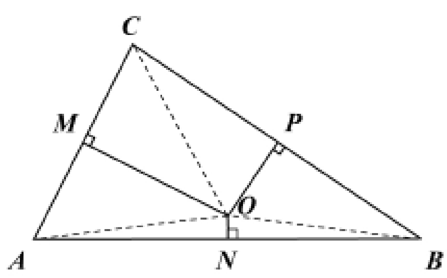


Figura 17.6

Hipótesis: ΔABC con $\overline{MO}$ mediatriz de $\overline{AC}$

$\overline{PO}$ mediatriz de $\overline{CB}$

$\overline{NO} \perp \overline{AB}$

Tesis: *N* es punto medio de $\overline{AB}$

$\overline{AO} \cong \overline{BO} \cong \overline{CO}$

Demostración

Al decir en la hipótesis que $\overline{NO} \perp \overline{AB}$ y en la tesis que *N* es punto medio, entonces se puede concluir que *NO* es mediatriz de *AB* y está pasando por *O*, punto de intersección de las otras dos mediatrices.

$\Delta CMO \cong \Delta AMO$ por C-C ($\overline{OM} \perp \overline{AC}$ *y M* punto medio), luego $\overline{OA} \cong \overline{OC}$. (1)

$\Delta CPO \cong \Delta BPO$ por C-C ($\overline{OP} \perp \overline{CB}$ y *P* punto medio), luego $\overline{OB} \cong \overline{OC}$. (2)

Por transitividad de (1) y (2) $\overline{OA} \cong \overline{OB}$, y como $\overline{ON} \perp \overline{AB}$, entonces $\overline{ON}$ es mediana y *N* es punto medio de $\overline{AB}$, por tanto $\overline{NO}$ es mediatriz de $\overline{AB}$ y pasa por *O*.

De (1) y (2) tenemos: $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$.

Teorema 17.1.9: De las bisectrices

Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo se intersecan en un punto (incentro) equidistante de los lados del triángulo (figura 17.7).

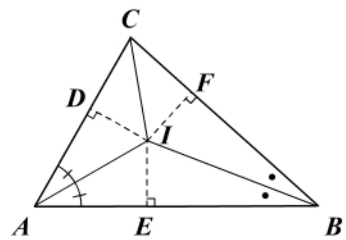


Figura 17.7

Hipótesis: ΔABC

$\overrightarrow{AI}$ bisectriz de $\hat{A}$

$\overrightarrow{BI}$ bisectriz de $\hat{B}$

$\overline{IE} \perp \overline{AB}$, $\overline{IF} \perp \overline{BC}$,

$\overline{ID} \perp \overline{AC}$

Tesis: $\overline{IE} \cong \overline{IF} \cong \overline{ID}$

$\overrightarrow{CI}$ bisectriz de $\hat{C}$

Demostración

$\Delta AEI \cong \Delta ADI$ por H-A, de donde $\overline{ID} \cong \overline{IE}$.

$\Delta BEI \cong \Delta BFI$ por H-A, de donde $\overline{IE} \cong \overline{IF}$.

Por transitividad: $\overline{ID} \cong \overline{IE} \cong \overline{IF}$.

$\Delta CFI \cong \Delta CDI$ por H-C, de donde $D\hat{C}I \cong F\hat{C}I$ y $\overline{CI}$ es bisectriz de $\hat{C}$.

El siguiente teorema no está relacionado con puntos y segmentos en el triángulo, pero nos servirá para demostrar el de las alturas.

Teorema 17.1.10

Si por cada vértice de un triángulo se traza una paralela al lado opuesto, se obtiene un nuevo triángulo en el cual los puntos medios de sus lados son los vértices del triángulo original (figura 17.8).

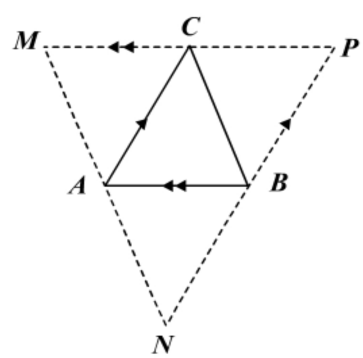


Figura 17.8

Hipótesis: ΔABC

$\overline{MAN} \parallel \overline{BC}$, $\overline{NBP} \parallel \overline{AC}$,

$\overline{MCP} \parallel \overline{AB}$

Tesis: $\overline{CM} \cong \overline{CP}$, $\overline{BP} \cong \overline{BN}$, $\overline{AM} \cong \overline{AN}$

Demostración

ACPB y *ACBN* son paralelogramos, por consiguiente $\overline{AC} \cong \overline{BP}$ y $\overline{AC} \cong \overline{BN}$; por transitividad se obtiene que $\overline{BP} \cong \overline{BN}$. (1)

ABCM y *ACBN* son paralelogramos, por consiguiente $\overline{AM} \cong \overline{CB}$ y $\overline{CB} \cong \overline{AN}$; por transitividad se obtiene que $\overline{AM} \cong \overline{AN}$. (2)

ABCM y *ACPM* son paralelogramos, por consiguiente $\overline{AB} \cong \overline{CM}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CP}$; por transitividad se obtiene que $\overline{CM} \cong \overline{CP}$. (3)

De (1), (2) y (3) queda demostrado el teorema.

Nota: podemos observar que los triángulos *ABC*, *AMC*, *BPC* y *BNA* son congruentes entre sí.

Teorema 17.1.11: De las alturas

Las alturas de un triángulo se intersecan en un punto (ortocentro) (figura 17.9).

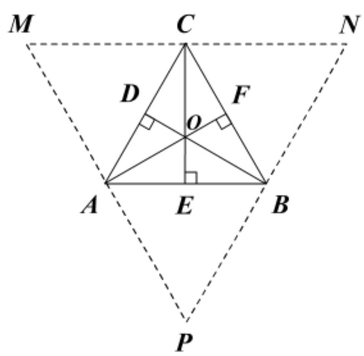


Figura 17.9

Hipótesis: ΔABC

$\overline{AF} \perp \overline{BC}$

$\overline{BD} \perp \overline{AC}$

$\overline{CE} \perp \overline{AB}$

Tesis: *O* es común a $\overline{AF}$, $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$.

Demostración

Por los vértices del ΔABC se trazan paralelas a los lados opuestos $\left(\overline{PAM} \parallel \overline{BC},\ \overline{PBN} \parallel \overline{AC},\ \overline{MCN} \parallel \overline{AB}\right)$. Según el teorema 17.1.10, *A*, *B* y *C* son los puntos medios del ΔPNM resultante.

Como $\overline{AF} \perp \overline{BC}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{PAM}$, y según el teorema 17.1.10, entonces la altura $\overline{AF}$ es mediatriz de $\overline{PM}$; con un razonamiento similar podemos afirmar que $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ son mediatrices de $\overline{PN}$ y $\overline{MN}$, respectivamente, y las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto (teorema 17.1.8). Ese punto es el punto de intersección de las alturas.

Ejemplo 17.1.1

Si un triángulo tiene dos medianas congruentes, el triángulo es isósceles (figura 17.10).

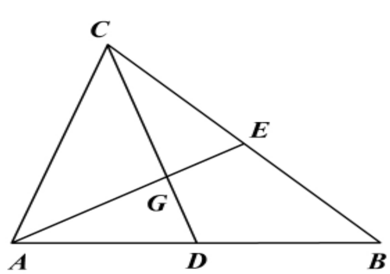


Figura 17.10

Hipótesis: ΔABC

$\overline{CD}$, $\overline{AE}$ medianas

$\overline{CD} \cong \overline{AE}$

G baricentro

Tesis: ΔABC isósceles

Demostración

Si G es el baricentro se tiene que $CG = \frac{2}{3}\ CD$ y $AG = \frac{2}{3}\ AE$ (teorema 17.1.7), y como $AE = CD$ entonces $CG = AG$ y $A\hat{C}G \cong C\hat{A}G$.

$\Delta CAD \cong \Delta ACE$ por L-A-L ($CD = AE$, $A\hat{C}G \cong C\hat{A}G$, CA común). De esta congruencia se tiene que $A\hat{C}E \cong C\hat{A}B$ y en consecuencia $\overline{CB} \cong \overline{AB}$. Por tanto ΔABC es isósceles.

Ejemplo 17.1.2

En un triángulo rectángulo la mediana relativa a la hipotenusa es de medida igual al segmento que une los puntos medios de los catetos (figura 17.11).

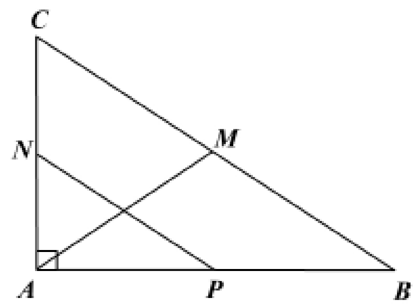


Figura 17.11

Hipótesis: ΔABC con $\hat{A}$ recto

$\overline{AM}$ mediana

N punto medio de $\overline{AC}$

P punto medio de $\overline{AB}$

Tesis: $AM = NP$

Demostración

$PN = \frac{1}{2} CB$ porque $\overline{PN}$ es paralela media (teorema 17.1.2).

$AM = \frac{1}{2}\ CB$ por teorema mediana-hipotenusa, luego $AM = PN$ por transitividad.

Ejemplo 17.1.3

Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo (figura 17.12).

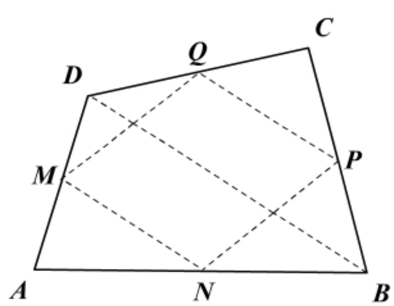


Figura 17.12

Hipótesis: cuadrilátero $ABCD$

M punto medio de $\overline{AD}$

N punto medio de $\overline{AB}$

P punto medio de $\overline{CB}$

Q punto medio de $\overline{DC}$

Tesis: $MNPQ$ es un paralelogramo

Demostración

Trazamos la diagonal $\overline{BD}$.

$\overline{MN} \parallel \overline{BD}$ y $MN = \frac{1}{2}\ BD$. $\overline{MN}$ paralela media.

$\overline{PQ} \parallel \overline{BD}$ y $PQ = \frac{1}{2} BD$. $\overline{PQ}$ paralela media.

Por transitividad se tiene que $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ y $\overline{MN} = \overline{PQ}$. Luego $MNPQ$ es un paralelogramo (teorema 16.1.10).

Ejemplo 17.1.4: La recta de Euler

En todo triángulo, el ortocentro H, el centroide G y el circuncentro O están alineados, y además $HG = 2GO$ (figura 17.13).

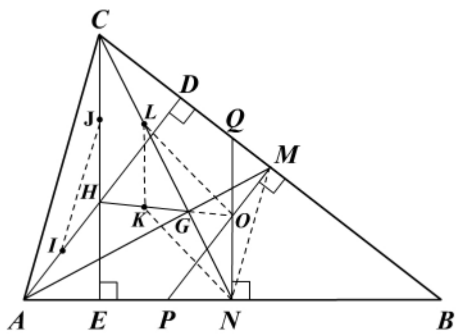


Figura 17.13

Hipótesis: ΔABC con
H: ortocentro
G: baricentro
O: circuncentro

Tesis: $H - G - O$ colineales
$HG = 2\,GO$

Demostración

Sean I, J puntos medios de $\overline{AH}$ y $\overline{CH}$, respectivamente. Entonces $\overline{JI}$ es paralela media en el ΔCHA y además MN es paralela media en el ΔABC ($\overline{CN}$ y $\overline{AM}$ son medianas), luego $\overline{JI} \parallel \overline{AC}$, $JI = \frac{1}{2} AC$ y $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, $MN = \frac{1}{2} AC$; por transitividad, $\overline{MN} \parallel \overline{IJ}$ y $MN = IJ$.

Ahora bien: $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ y $\overline{MP} \perp \overline{BC}$, luego $\overline{AD} \parallel \overline{MP}$. Además $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ y $\overline{NQ} \perp \overline{AB}$, luego $\overline{CE} \parallel \overline{NQ}$.

Por tener los lados paralelos, $J\hat{I}D \cong N\hat{M}P$ y $E\hat{J}I \cong Q\hat{N}M$; estos ángulos congruentes y $\overline{JI} \cong \overline{MN}$ implican que $\Delta JIH \cong \Delta NMO$ y en consecuencia $HJ = ON$ (1).

Sea L el punto medio de $\overline{GC}$ y K el punto medio de $\overline{HG}$, entonces $\overline{LK}$ es paralela media en el ΔCHG y por tanto $LK = \frac{1}{2} CH = HJ = ON$ (2) y además $\overline{LK} \parallel \overline{CH} \parallel \overline{CE} \parallel \overline{QN} \parallel \overline{ON}$; tenemos así que $LK = ON$ y $\overline{LK} \parallel \overline{ON}$, luego $LKNO$ es un paralelogramo (teorema 16.1.10) en el cual G es el punto medio (teorema 16.1.6) de $\overline{LN}$ y $\overline{KO}$.

Como K es punto medio de $\overline{HG}$ y G es punto medio de $\overline{KO}$, o sea $H - K - G$ y $K - G - O$, concluimos que $H - G - O$ son colineales y además $HG = 2GO$.

La demostración anterior está basada en la demostración hecha por el célebre matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). La recta que pasa por H, G y O se conoce con el nombre de "recta de Euler".

17.2 Transversales a rectas paralelas

Cuando varias rectas paralelas son cortadas o intersecadas por otras rectas, se presentan segmentos con propiedades especiales.

Teorema 17.2.1 Teorema fundamental del paralelismo

Si tres o más rectas paralelas determinan segmentos congruentes en una transversal, entonces determinan segmentos congruentes en cualquier otra transversal (figura 17.14).

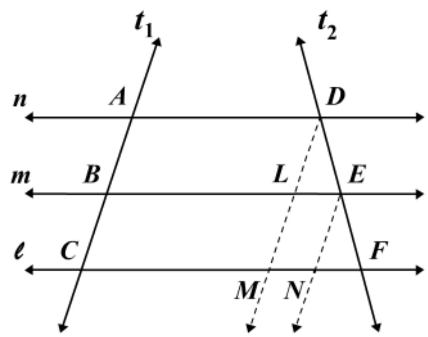


Figura 17.14

Hipótesis: t_1, t_2 transversales a $\ell \parallel m \parallel n$ en C, B, A y F, E, D, respectivamente
$\overline{AB} \cong \overline{BC}$

Tesis: $\overline{DE} \cong \overline{EF}$

Demostración

Por D y E trazamos $\overline{DLM}$ y $\overline{EN}$ paralelas a t_1.
$ABLD$ y $BCNE$ son paralelogramos (los lados opuestos son paralelos), luego $\overline{AB} \cong \overline{DL}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EN}$ por ser lados opuestos de paralelogramos.
$N\hat{E}F \cong L\hat{D}E$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas ($\overline{EN} \parallel \overline{DM} \parallel t_1$), y por la misma razón $E\hat{N}F \cong B\hat{C}N \cong A\hat{B}E \cong D\hat{L}E$.
Si $\overline{AB} \cong \overline{DL}$, $\overline{BC} \cong \overline{EN}$ y $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, entonces $\overline{DL} \cong \overline{EN}$ y $\Delta DLE \cong \Delta ENF$ por A-L-A ($N\hat{E}F \cong L\hat{D}E$, $DL = EN$, $E\hat{N}F \cong D\hat{L}E$), de lo cual se concluye que $\overline{DE} \cong \overline{EF}$.

Nota: el teorema anterior es independiente de las posiciones relativas entre las transversales.

Teorema 17.2.2: De la base o mediana

En todo trapecio el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos (mediana) es paralelo a la base y su medida es la semisuma de las medidas de las bases (figura 17.15).

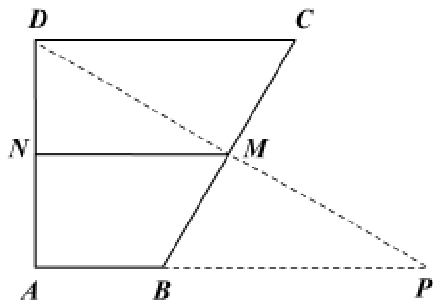


Figura 17.15

Hipótesis: trapecio $ABCD$

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

N punto medio de $\overline{AD}$

M punto medio de $\overline{BC}$

Tesis: $\overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$MN = \dfrac{AB+DC}{2}$

Demostración

Trazamos $\overline{DM}$ y lo prolongamos hasta cortar la prolongación de $\overline{AB}$ en P.

$\Delta MCD \cong \Delta MBP$ por A-L-A $\left(\hat{C} \cong M\hat{B}P,\ CM = BM, C\widehat{M}D \cong B\widehat{M}P\right)$; entonces

$\overline{DM} \cong \overline{MP}$ y M es punto medio de $\overline{DP}$, además $\overline{DC} \cong \overline{BP}$.

N y M son puntos medios de $\overline{DA}$ y $\overline{DP}$, luego $\overline{NM}$ es paralela media en ΔAPD y por el teorema 17.1.2 $\overline{MN} \parallel \overline{AP}$ y $MN = \dfrac{1}{2} AP$.

Si $A-B-P$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{AP}$, entonces $\overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

Si $DC = BP$, $AP = AB + BP$ y $NM = \dfrac{1}{2} AP$, entonces $MN = \dfrac{AB + DC}{2}$.

Corolario 17.2.1

La mediana o base media de un trapecio biseca cualquier segmento que una las bases. Demuéstrelo.

Teorema 17.2.3

En todo trapecio el segmento que une los puntos medios de las diagonales es paralelo a las bases y su medida es la semidiferencia de las medidas de las bases (figura 17.16).

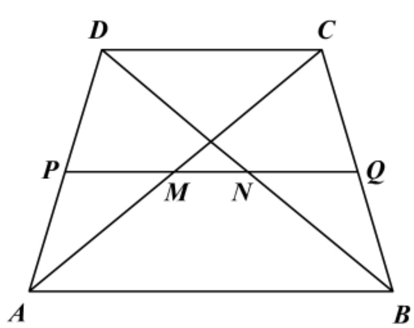


Figura 17.16

Hipótesis: trapecio $ABCD$

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

M punto medio de $\overline{AC}$

N punto medio de $\overline{BD}$

Tesis: $\overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$MN = \dfrac{AB - DC}{2}$

Demostración

Sea P punto medio de $\overline{AD}$ y Q punto medio de $\overline{CB}$. Por el teorema de la paralela media en el ΔADC tendremos que $\overline{PM} \parallel \overline{DC} \parallel \overline{AB}$ y $PM = \frac{1}{2}DC$. Por el mismo teorema en el ΔACB tendremos que $\overline{MQ} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $MQ = \frac{1}{2}AB$.

Aplicando el mismo teorema en el ΔBCD tendremos $\overline{NQ} \parallel \overline{DC} \parallel \overline{AB}$ y $NQ = \frac{1}{2}DC$.

Por transitividad $\overline{PM} \parallel \overline{MQ} \parallel \overline{NQ} \parallel \overline{DC} \parallel \overline{AB}$, lo cual indica que P, M, N, Q tienen que ser colineales porque de lo contrario se tendrían rectas diferentes paralelas a AB y DC por P, M, N, Q, contradiciendo el postulado de las paralelas. Por consiguiente $\overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

Además $MN = PQ - PM - NQ = \dfrac{AB + DC}{2} - \dfrac{DC}{2} - \dfrac{DC}{2}$.

$\therefore\ MN = \dfrac{AB - DC}{2}$.

Ejemplo 17.2.1

Se prolongan hasta O los lados no paralelos de un trapecio $ABCD$ isósceles. Se une el punto medio M de $\overline{AO}$ con el punto medio N de $\overline{BO}$. Sean P y Q los puntos medios de las diagonales. Demuestre que $MPQN$ es un trapecio isósceles (figura 17.17).

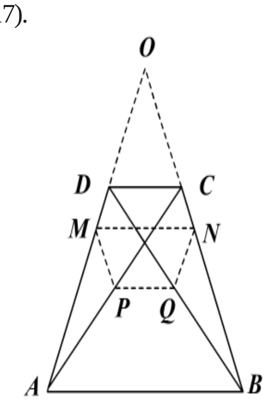


Figura 17.17

Hipótesis: $ABCD$ trapecio con:

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

$\overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{BC} = \{O\}$

M punto medio de $\overline{AO}$

N punto medio de $\overline{BO}$

P punto medio de $\overline{AC}$

Q punto medio de $\overline{BD}$

Tesis: $PQNM$ es un trapecio isósceles

Demostración

$D\hat{A}B \cong O\hat{B}A$ son ángulos de la base del trapecio isósceles (teorema 16.1.16), por consiguiente $\overline{AO} \cong \overline{BO}$, y por sustracción de segmentos se tiene que $\overline{DO} \cong \overline{CO}$ (1).

Por el teorema de la paralela media en el triángulo AOB tendremos que $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ (2), y por el mismo 17.2.3 tendremos que $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$. (3)

De (2) y (3) tenemos $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ y por tanto *PMNQ* es un trapecio. (4)

Por el teorema de la paralela media en los triángulos *ACO* y *BDO* y de (1) tendremos que $MP = \frac{1}{2}\,DC = \frac{1}{2}\,OD = NQ$. (5)

De (4) y (5) concluimos que *MPQN* es un trapecio isósceles. ¿Podrían llegar a ser *M*, *P*, *Q*, *N* colineales?

Ejemplo 17.2.2

En la figura 17.18:

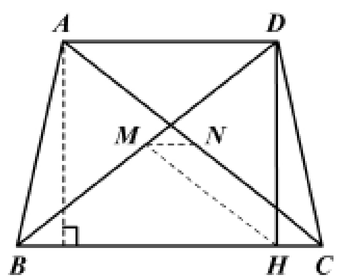


Figura 17.18

Hipótesis: trapecio *ABCD* con
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
$\overline{DH} \perp \overline{BC}$
M, *N* puntos medios de las diagonales

Tesis: *MNCH* es paralelogramo

Demostración

$\overline{MN} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{HC}$ y $MN = \dfrac{BC - AD}{2}$ por el teorema 17.2.3.

Trazamos $\overline{AI} \perp \overline{BC}$ y se obtiene que $IH = AD$ (¿por qué?). Además el $\Delta AIB \cong \Delta DHC$ por H-C ($AB = DC$ y $AI = DH$). Luego $BI = HC$.

Tenemos entonces que $MN = \dfrac{AC - AD}{2} = \dfrac{BI + IH - HC - AD}{2} = HC$.

Podemos por tanto afirmar que *MNCH* es un paralelogramo ($\overline{MN} \parallel \overline{HC}$ y $MN = HC$).

¿De qué otra forma se puede demostrar que *MNCH* es un paralelogramo?

Ejercicios
Módulo 17

1. En las siguientes figuras (1 al 9) determine el valor de cada variable.

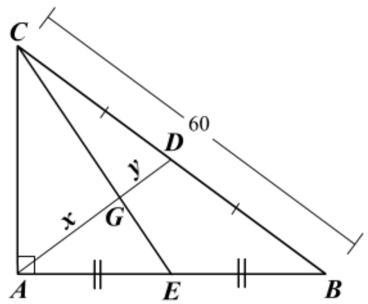


Figura 1

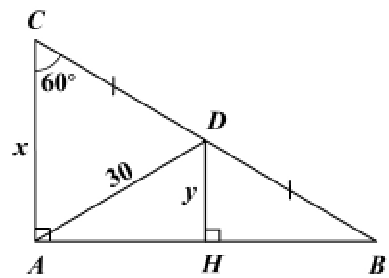


Figura 2

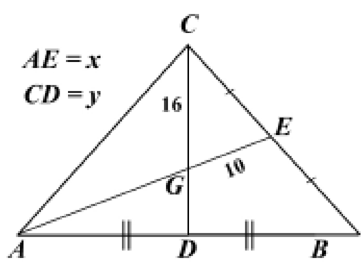


Figura 3

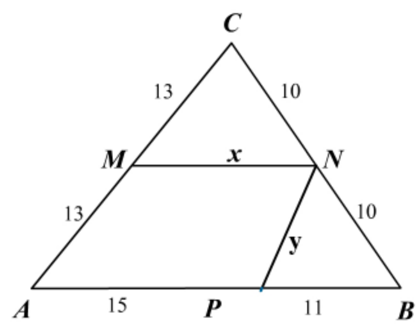


Figura 4

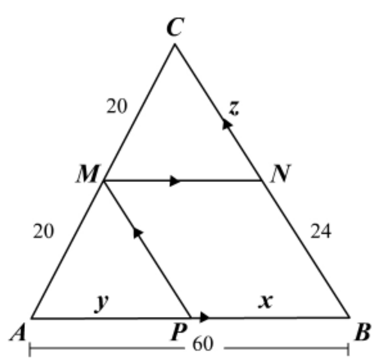


Figura 5

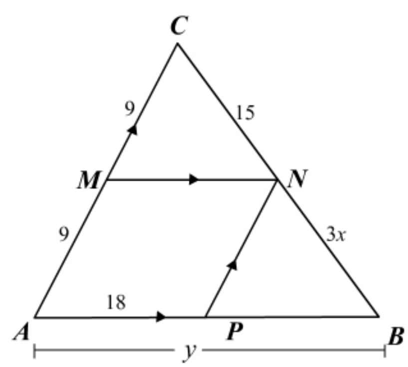


Figura 6

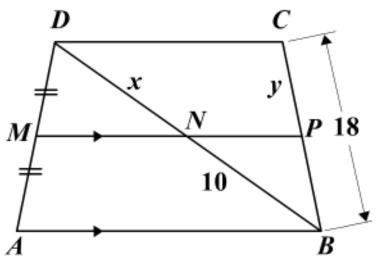


Figura 7

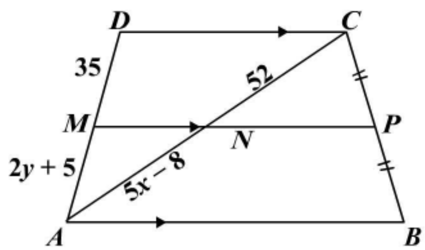


Figura 8

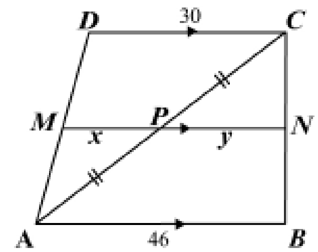


Figura 9

2. En la figura 10:

Hipótesis: paralelogramo *ABCD*
M, N, P, Q son puntos medios de
$\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$ y $\overline{OQ}$, respectivamente
Tesis: *MMPQ* es un paralelogramo.

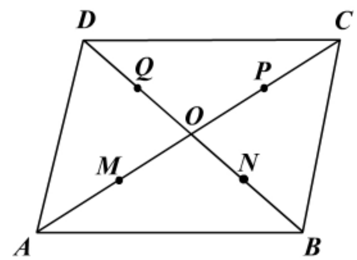


Figura 10

3. En la figura 11:

Hipótesis: ΔABC ; $\overline{CH} \perp \overline{AB}$
M punto medio de *AC*
N punto medio de *BC*
P punto medio de *AB*
Tesis: *MNHP* es trapecio isósceles

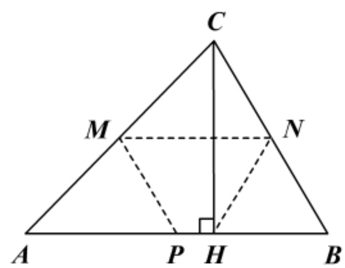


Figura 11

4. Demuestre que los puntos medios de los lados de un trapecio isósceles son los vértices de un rombo.

5. Demuestre que el vértice de un triángulo isósceles y los puntos medios de los lados son los vértices de un rombo.

Auto Evaluación Autoevaluación

Capítulo 4 Cuadriláteros

Módulos 14 al 17

1. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

- Si los lados no comunes de los ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí, los ángulos son rectos.
- Un triángulo isósceles tiene tres ángulos agudos.
- Un triángulo isósceles puede ser equiángulo.
- Los ángulos alternos son suplementarios.
- La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de dos ángulos interiores.
- Un ángulo exterior de un triángulo es por lo menos el suplemento de un ángulo interior del triángulo.
- En un triángulo rectángulo en el cual un ángulo agudo mide 30º la medida de la hipotenusa es la mitad de la medida del cateto opuesto al ángulo de 30º.
- La medida del segmento rectilíneo que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es igual a la medida del tercer lado.
- Las bisectrices de los ángulos opuestos de un rectángulo son paralelas.
- Las bisectrices de los ángulos adyacentes de un paralelogramo son perpendiculares.
- Un paralelogramo es equilátero si tiene dos lados congruentes.
- Un trapecio es equilátero si tiene dos lados congruentes.
- Los lados no paralelos de un trapecio isósceles forman ángulos congruentes con las bases.
- Los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero se cortan en sus puntos medios.
- La mediana de un trapecio biseca a cada diagonal.
- Las rectas que pasan por los vértices de un paralelogramo, paralelas a las diagonales, forman otro paralelogramo.
- Las rectas que pasan por los vértices de un cuadrilátero, paralelas a las diagonales, forman un paralelogramo.

2. Determine el(los) cuadrilátero(s) que cumple(n) la propiedad dada.

- Los lados opuestos son paralelos.
- Los lados son congruentes.
- Los lados opuestos son congruentes.
- Las diagonales se bisecan.
- Las diagonales bisecan los ángulos.
- Las diagonales son perpendiculares.
- Las diagonales son congruentes.
- Los ángulos opuestos son suplementarios.
- Los ángulos adyacentes son suplementarios.

3. Cada una de las siguientes afirmaciones acerca de un cuadrilátero bastaría para demostrar que es paralelogramo o cuadrado, o rectángulo, o rombo. Escriba al final el nombre del cuadrilátero correspondiente. Si la información no es suficiente para ninguno de los cuadriláteros mencionados, al final escriba «ninguno».

- Tiene sus lados congruentes ____
- Tiene dos lados consecutivos congruentes y perpendiculares ____________________
- Las diagonales son congruentes ____
- Las diagonales se bisecan ____
- Las diagonales son perpendiculares y congruentes ___________________________
- Cada dos ángulos consecutivos son suplementarios congruentes _________________
- Las diagonales son bisectrices de los ángulos correspondientes ________________
- Dos lados consecutivos son perpendiculares y congruentes _____________________
- Las diagonales son mediatrices entre sí _____________________________________
- Una diagonal está contenida en la bisectriz a dos ángulos ______________________
- Cada dos ángulos consecutivos (adyacentes) son suplementarios ________________
- Dos ángulos consecutivos (adyacentes) son suplementarios _____________________
- Una diagonal determina dos triángulos congruentes ____________________________
- Cada dos lados consecutivos son perpendiculares ______________________________
- Las diagonales son congruentes y mediatrices entre sí _________________________
- Dos lados son paralelos y los otros dos son congruentes ________________________
- Dos lados son paralelos y dos ángulos opuestos son congruentes ________________
- Dos ángulos opuestos son rectos ____

En cada una de las siguientes figuras (1 a 10) encuentre el valor numérico de la(s) variable(s).

4.

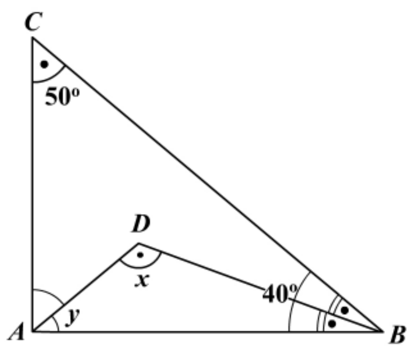


Figura 1

5.

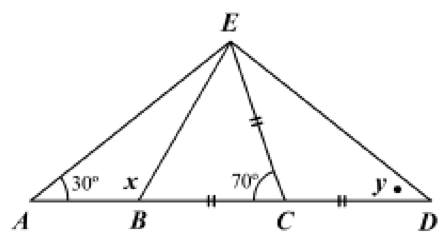


Figura 2

6.

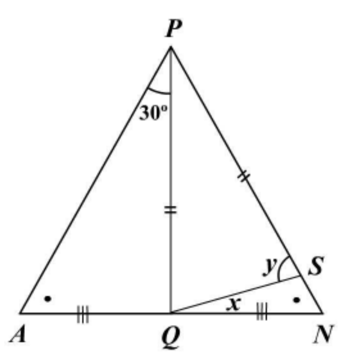


Figura 3

7.

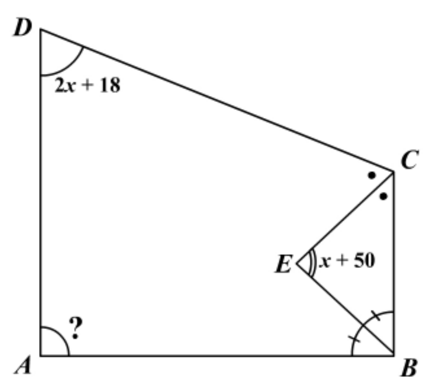


Figura 4

Autoevaluación

Autoevaluación

8.

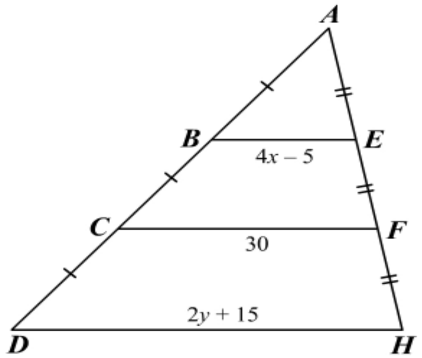


Figura 5

9.

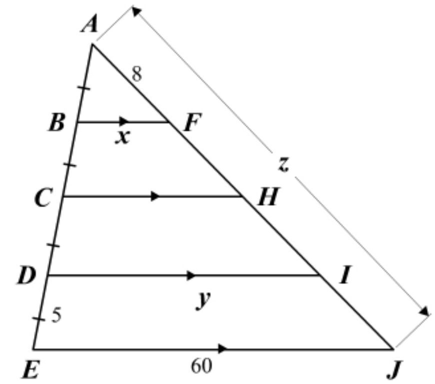


Figura 6

10.

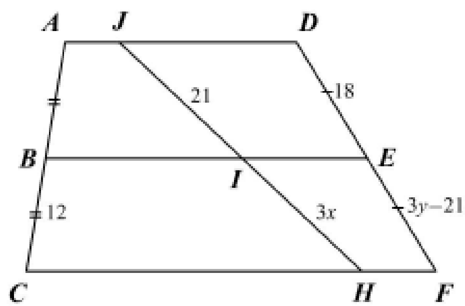


Figura 7

11.

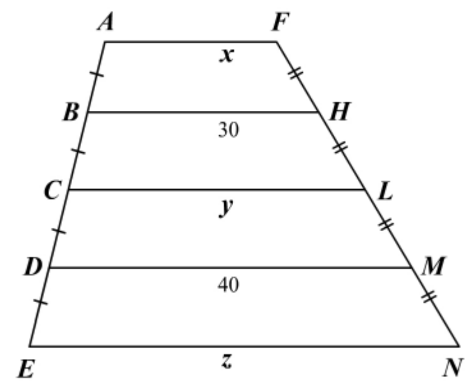


Figura 8

12.

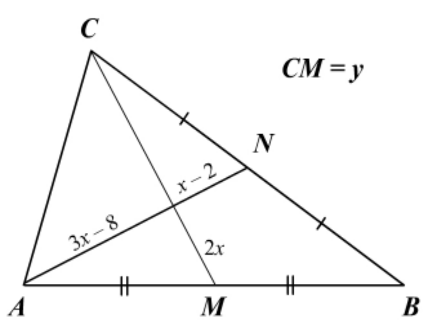


Figura 9

13.

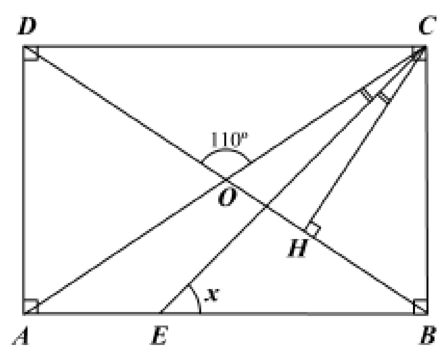


Figura 10

De acuerdo con la figura (11 a 20) demuestre lo solicitado.

14. En la figura 11:

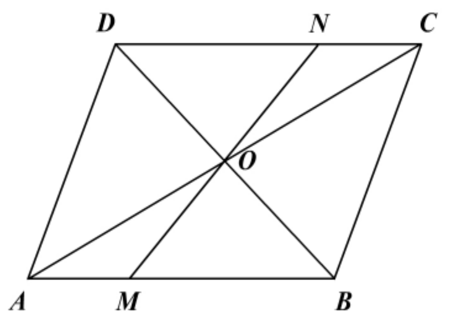


Figura 11

Hipótesis: paralelogramo *ABCD*

$\overline{DB}$, $\overline{AC}$ diagonales

$\overline{AC}$ corta a $\overline{DB}$ en *O*

$N - O - M$

Tesis: $\overline{ON} \cong \overline{OM}$

15. En la figura 12:

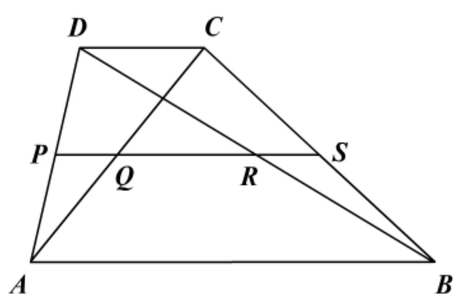


Figura 12

Hipótesis: trapecio *ABCD*

P y *S* puntos medios de $\overline{DA}$ y $\overline{CB}$

Tesis: *PS* biseca las diagonales

16. En la figura 13:

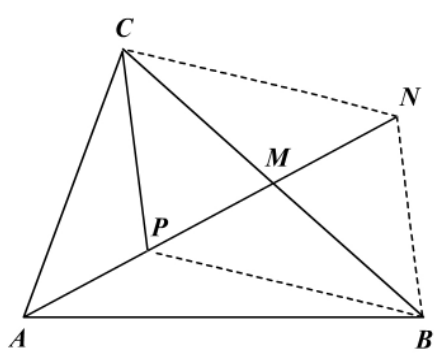


Figura 13

Hipótesis: triángulo *ABC* con $\overline{AM}$ mediana

$M\hat{C}P \cong M\hat{B}N$

Tesis: *CPBN* es un paralelogramo

17. En la figura 14:

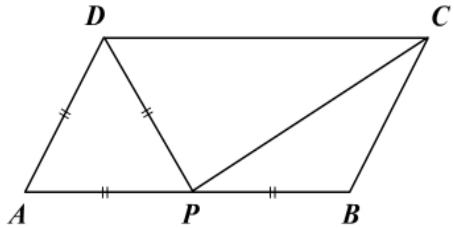


Figura 14

Hipótesis: paralelogramo $ABCD$
$AP = PB$, $AB = 2AD$

Tesis: $\overline{PD} \perp \overline{PC}$

18. En la figura 15:

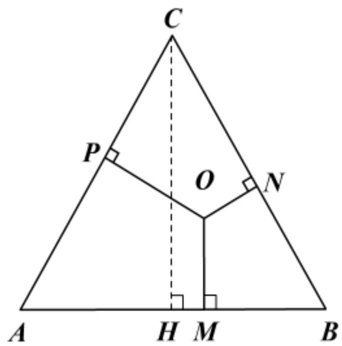


Figura 15

Hipótesis: ΔABC equilátero
O punto interior del ΔABC
$\overline{ON} \perp \overline{BC}$, $\overline{OM} \perp \overline{AB}$,
$\overline{OP} \perp \overline{AC}$, $\overline{CH} \perp \overline{AB}$

Tesis: $OM + ON + OP = CH$

19. En la figura 16:

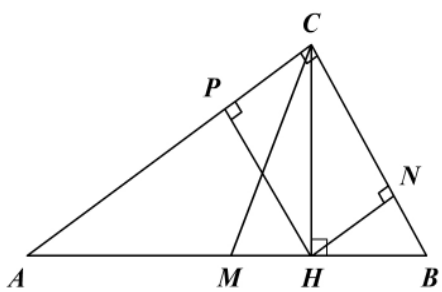


Figura 16

Hipótesis: ΔABC rectángulo en C
$\overline{CH} \perp \overline{AB}$, $\overline{HP} \perp \overline{AC}$, $\overline{HN} \perp \overline{BC}$
$\overline{CM}$ mediana

Tesis: $\overline{PN} \cong \overline{CH}$, $C\hat{P}N \cong \hat{B}$, $C\widehat{N}P \cong \hat{A}$,
$\overline{CM} \perp \overline{PN}$

20. En la figura 17:

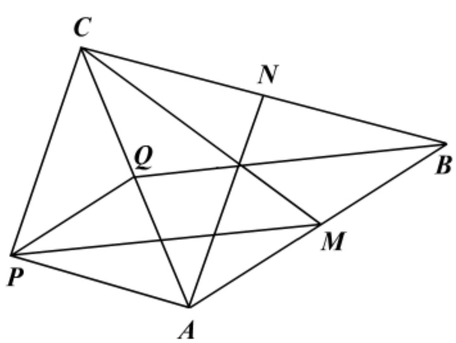


Figura 17

Hipótesis: ΔABC con $\overline{BQ}$, $\overline{AN}$, $\overline{CM}$ medianas
$\overline{PM} \cong \overline{QB}$, $\overline{PM} \parallel \overline{QB}$

Tesis: $\overline{PC} \cong \overline{AN}$

21. En la figura 18:

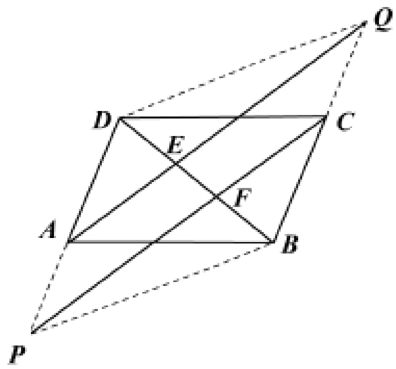


Figura 18

Hipótesis: paralelogramo $ABCD$

$\overline{AQ}$ bisectriz de $\hat{A}$

$\overline{CP}$ bisectriz de $\hat{C}$

$D-A-P;\ B-C-Q$

Tesis: $APCQ$ es un paralelogramo

$\overline{PF} \cong \overline{EQ}$

$PDQB$ es un paralelogramo

22. En la figura 19:

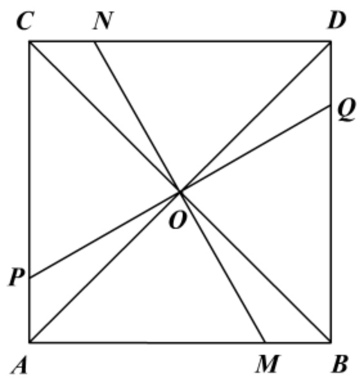


Figura 19

Hipótesis: cuadrado $ABCD$

Las diagonales se cortan en O

$\overline{MN} \perp \overline{PQ}$; $\overline{MN} \cap \overline{PQ}$ en O

Tesis: $PMQN$ es un cuadrado

23. En la figura 20:

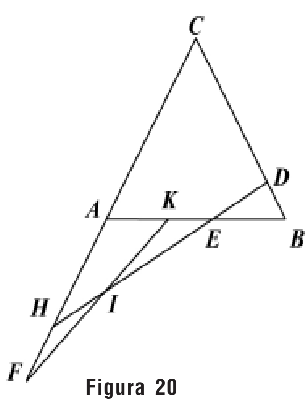


Figura 20

Hipótesis: $CA = CB$; $C-D-B$

$AH = AE$; $A-K-E-B$

$HF = HI$; $H-I-E-D$

$F-I-K$

Tesis: $m\left(C\widehat{D}H\right) = 6m\left(\hat{F}\right)$

Autoevaluación

Autoevaluación

Demuestre las siguientes proposiciones (24 a 36):

24. Si un triángulo tiene dos alturas congruentes, es isósceles.

25. Si dos medianas de un triángulo son perpendiculares a los lados, el triángulo es equilátero.

26. En un triángulo rectángulo la bisectriz del ángulo recto es bisectriz del ángulo entre la altura y la mediana relativas a la hipotenusa.

27. En un triángulo rectángulo la mediana y la altura relativas a la hipotenusa forman entre sí un ángulo que tiene como medida la diferencia de las medidas de los ángulos agudos.

28. En un triángulo *ABC* cualquiera, $\overline{CH}$ es la altura y $\overline{CD}$ es la bisectriz de $\hat{C}$. Si $CA > CB$, entonces:

$$m\left(H\hat{C}D\right)=\left(\frac{m\left(\hat{B}\right)-m\left(\hat{A}\right)}{2}\right)$$

29. La diferencia de las medidas de los ángulos que una bisectriz interior forma con el lado opuesto en un triángulo es igual a la diferencia de las medidas de los ángulos de la base.

30. La medida del ángulo formado por la bisectriz y la altura trazadas desde el mismo vértice de un triángulo es igual a la semidiferencia de las medidas de los ángulos de la base.

31. En un triángulo rectángulo que tiene un ángulo de medida 30º, la mediana y la altura relativas a la hipotenusa trisecan el ángulo recto.

32. Las alturas de un triángulo dividen los ángulos del triángulo en ángulos congruentes dos a dos.

33. Si dos ángulos opuestos de un cuadrilátero son rectos, entonces las bisectrices de los ángulos opuestos son paralelas.

34. Las bisectrices de dos ángulos adyacentes de un paralelogramo son perpendiculares.

35. En un paralelogramo los segmentos que unen un vértice con el punto medio de los lados opuestos trisecan la diagonal.

36. En todo cuadrilátero los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos y los puntos medios de las diagonales se cortan en sus puntos medios.

37. Sean las rectas ℓ_1 y ℓ_2 paralelas. Desde el punto A de una de ellas se baja a la otra recta la perpendicular $\overline{AC}$ y una oblicua $\overline{AB}$. Luego se traza la secante $\overline{BED}$ con $A-E-L$ tal que $DE = 2BE$ con *A* y *D* en la misma recta. Demuestre que $m(D\hat{B}C)=\frac{1}{3}\,m(A\hat{B}D)$

38. Un cuadrilátero no convexo *ABCD* tiene en *D* un ángulo entrante. Demuestre que $A\hat{D}C$ situado en el exterior del cuadrilátero tiene por medida la suma de las medidas de los ángulos *A*, *B* y *C*.

39. Se da un triángulo isósceles *ABC* de base *BC*. Se prolonga la base *BC* en una longitud *CD* = *AB*, se traza la recta

AD y se prolonga AB en una longitud $BE = BC/2$; luego se traza la recta EHF con H punto medio de $\overline{BC}$ y F en $\overline{AD}$.

a. Pruebe que $m\left(A\hat{D}B\right) = \frac{1}{2}\, m\left(A\hat{B}C\right)$.

b. Pruebe que $\overline{EA} \cong \overline{HD}$.

c. Pruebe que $FA = FD = FH$.

d. Halle $m\left(A\hat{F}H\right)$ y $m\left(A\hat{D}B\right)$ si $m\left(B\hat{A}C\right) = 62º$.

40. Las bisectrices de los ángulos opuestos de un paralelogramo al intersecarse forman un rectángulo. ¿Qué cuadrilátero forman si en lugar del paralelogramo se trata de un rectángulo?

41. $ABCD$ es un paralelogramo y M y N son puntos sobre la diagonal AC tales que $A - M - N - C$. Demuestre que $DMBN$ es un paralelogramo si:

a. $\overline{DM} \perp \overline{AC}$ y $\overline{BN} \perp \overline{AC}$.

b. $\overline{AM} \cong \overline{CN}$.

c. $\overline{DM}$ y $\overline{BN}$ son bisectrices.

42. Por el punto de corte O de diagonales de un paralelogramo $ABCD$ se trazan dos rectas cualesquiera. Una de ellas corta a $\overline{AB}$ en E y a $\overline{CD}$ en F; la otra corta a $\overline{AD}$ en H y a $\overline{BC}$ en L. Demuestre que $ELFH$ es un paralelogramo.

43. En un paralelogramo $ABCD$ se unen los vértices B y D al punto medio del lado opuesto. Demuestre que AC queda dividido en tres partes congruentes.

44. Se unen los puntos medios M y N de las bases AB y CD del trapecio $ABCD$ con los puntos medios P y Q de las diagonales AC y BD, respectivamente. Demuestre que $MPNQ$ es un paralelogramo.

45. Sobre los lados de un triángulo ABC se construyen exteriormente los triángulos equiláteros MAB, NBC y PAC. Demuestre que $MC = AN = PB$.

46. Se construye exteriormente al cuadrado $ABCD$ el triángulo equilátero BCP, e interiormente el triángulo equilátero ABM. Demuestre que los puntos D, M y P son colineales.

47. Sobre los lados AB y CD de un triángulo equilátero ABC se construyen exteriormente los cuadrados $ABDP$ y $ACMN$. Demuestre que la altura AH del triángulo es perpendicular a $\overline{PN}$, $\overline{PN} \parallel \overline{DM}$ y $\overline{PC} \perp \overline{BN}$.

48. En un triángulo ABC, P es el punto medio de la mediana $\overline{AM}$, y $\overline{MQ} \parallel \overline{BPN}$ con $A - N - Q - C$. Demuestre que $NC = 2AN$.

49. Las diagonales del rectángulo $ABCD$ se cortan en O. Por un punto P de $\overline{AB}$ se traza la recta $\overline{OP}$ que corta a $\overline{CD}$ en Q. Por P y Q se trazan paralelas a la diagonal AC, las cuales cortan a BC en M y a AD en N. Demuestre que $NPMQ$ es un paralelogramo y que su semiperímetro es igual a la medida de la diagonal del rectángulo.

Autoevaluación

Autoevaluación

50. ABC es un triángulo cualquiera con $AB > AC$. Se traza la mediana AM. Demuestre que $m(B\hat{M}A) > m(A\hat{M}C)$ y $m(C\hat{A}M) > m(C\hat{A}M)$.

51. En un triángulo ABC, AM, BN y CP son las medianas. Demuestre que si $BC > CA > AB$, entonces $CP > BM > AM$.

52. Se da un triángulo equilátero ABC de lado ℓ y se prolonga $\overline{BC}$ una longitud $CM = \ell$.

- Calcule las medidas de los ángulos del triángulo ACM. Muestre que $\overline{AM} \perp \overline{AB}$.
- Se prolongan del mismo modo $CA = AN = \ell$ y $AB = BP = \ell$. Pruebe que el triángulo PMN es equilátero. (Considere el ortocentro O del triángulo ABC.)

Usando el teorema de la paralela media o de la base media, resuelva los ejercicios 53 a 59.

53. La suma de las distancias de los vértices de un triángulo a una recta cualquiera es igual a la suma de las distancias de los puntos medios de los lados a esta recta.

54. La suma de las distancias de los tres vértices de un triángulo a una recta cualquiera es igual a tres veces la distancia del baricentro a esta recta.

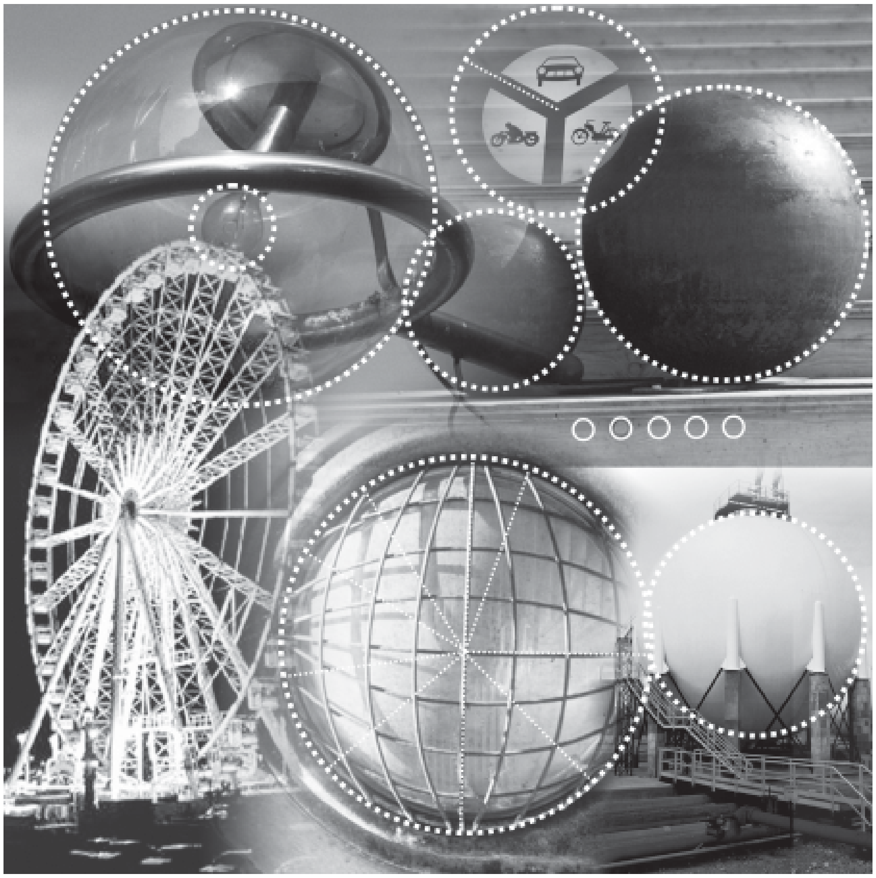
55. Por uno de los vértices de un paralelogramo se traza una recta cualquiera y de cada uno de los vértices restantes se traza una perpendicular a la recta. La distancia a la recta del vértice intermedio es igual a la suma o la diferencia de las distancias a la misma recta de los otros dos vértices (teorema de Varignon).

56. La suma de las distancias de los vértices de un paralelogramo a una recta exterior es igual a cuatro veces la distancia del punto de intersección de las diagonales a esta recta.

57. La suma o diferencia de las distancias de un punto dado a dos lados consecutivos de un rombo es igual a la suma o diferencia de las distancias a los otros dos lados.

58. La suma de las distancias de los vértices de un cuadrilátero a una recta cualquiera es igual a cuatro veces la distancia a esta recta del punto de intersección de las rectas que unen dos a dos los puntos medios de los lados opuestos del cuadrilátero.

59. Una recta pasa por el baricentro de un triángulo. La suma de las distancias de dos vértices situados en el mismo semiplano de borde la recta es igual a la distancia del tercer vértice a dicha recta.



Capítulo 5
Circunferencia

Contenido breve

Módulo 18
Generalidades de la circunferencia

Módulo 19
Arcos y ángulos

Autoevaluación
Capítulo 5, módulos 18 y 19

Presentación

Cuando se estudia la circunferencia generalmente se enfatiza en la obtención del número π, que está relacionado con su perímetro y el área del círculo. Pero no se trata en este capítulo de plantear cómo obtener a π, sino de presentar algunas generalidades sobre la circunferencia y el círculo, tales como los elementos y las posiciones relativas entre recta y circunferencia y entre dos circunferencias. Además, se analizan propiedades de rectas tangentes y de cuerdas y arcos y se finaliza presentando los diferentes ángulos relacionados con la circunferencia y la forma de hallar su medida.

Módulo 18

Generalidades de la circunferencia

Menelao de Alejandría

Matemático y astrónomo nacido en Alejandría (ciudad fundada en 332 a C. por Alejandro Magno, rey de Macedonia).

Contenidos del módulo

18.1 Arcos de circunferencia
18.2 Posiciones relativas
18.3 Rectas tangentes

Objetivos del módulo

1. Definir la medida de un arco y del ángulo central.
2. Establecer el álgebra de arcos y su congruencia.
3. Mostrar las posiciones relativas (en el plano) de una circunferencia y una recta.
4. Mostrar las posiciones relativas (en el plano) de dos circunferencias.
5. Demostrar las propiedades de las rectas tangentes.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es un arco?
2. ¿Qué es la medida de un arco?
3. ¿Cuándo dos arcos son congruentes?
4. ¿Cómo se suman o se restan arcos?
5. En el plano, ¿cuál es la posición relativa de un punto respecto a una circunferencia?
6. En el plano, ¿cuál es la posición relativa de una recta y una circunferencia?
7. En el plano, ¿cuáles son las posiciones relativas entre dos circunferencias?
8. ¿Qué relación hay entre el segmento radial y una tangente?
9. ¿Cómo son los segmentos tangentes a una circunferencia trazados desde un punto exterior?
10. ¿Qué propiedades tiene la recta que pasa por el centro de la circunferencia y el punto de intersección de las tangentes?

Introducción

En este módulo se retoman los elementos en la circunferencia y el círculo y se analiza qué propiedades tiene la medida de arcos, la congruencia de arcos, la adición y la sustracción de arcos. Se muestran luego las posiciones relativas (en el plano) con respecto a una circunferencia de un punto, una recta y otra circunferencia. Finalmente, se analizan las propiedades que tiene la recta tangente a una circunferencia.

Vea el módulo 18 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

18.1 Arcos de circunferencia

Vimos en el capítulo 2 algunos elementos básicos relacionados con la circunferencia y el círculo, tales como arco, ángulo central, cuerda, etc. Estudiaremos en este capítulo las propiedades de algunos de ellos y las relaciones que pueden existir entre los mismos.

En la figura 18.1 se tiene el arco de circunferencia *AB* y el ángulo central *AOB*. Decimos que el ángulo central interseca al arco *AB* y que el arco *AB* subtiende el ángulo central *AOB*.

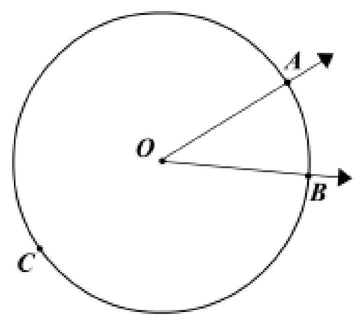


Figura 18.1

Decimos que un ángulo interseca un arco si cumple que:
a. Los puntos extremos del arco están sobre los lados del ángulo.
b. El interior del arco está contenido en el interior del ángulo.

Vimos en el capítulo 2 que el grado es una unidad de medida de ángulo. La unidad para medir arcos es el arco intersecado por un ángulo central de un grado. En forma análoga, esta unidad se llama *grado* (figura 18.2). Así:

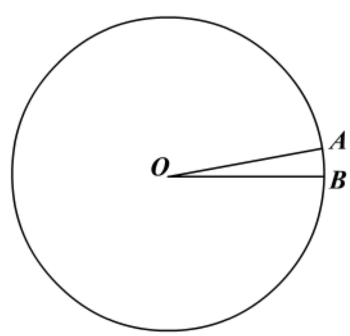


Figura 18.2

$$m(A\hat{O}B) = m(\hat{A}B) = 1^{\circ}$$

La suma de la medida de los ángulos adyacentes consecutivos alrededor de un punto es 360º y el número de grados de la circunferencia es 360º, cada uno en el sistema sexagesimal. Por tanto, aunque el grado de ángulo no es el mismo que el grado de arco, el valor numérico de la medida de los ángulos está relacionado con el valor numérico de la medida de los arcos, como se expresa en la siguiente definición.

Definición 18.1.1

a. Si AB es un arco menor, entonces su medida es igual a la medida, en grados, del ángulo central correspondiente.

b. Si el arco AB es una semicircunferencia, entonces su medida es 180º.

c. Si el arco ABC es un arco mayor (figura 18.1) y AB es el arco menor, entonces $m(\widehat{ACB}) = 360º - m(\widehat{AB})$.

Tenemos por tanto así que si en la figura 18.2 $m(A\hat{O}B) = 1º$, entonces $m(\widehat{AB}) = 1º$, y en general $m(A\hat{O}B) = \alpha º$. En consecuencia $m(\widehat{AB}) = \alpha º$ y desde luego $m(\widehat{ACB}) = 360º - \alpha º$.

Establecimos la medida en grados de un arco de circunferencia, lo cual no se puede confundir con la longitud del arco. El grado de arco no es unidad de longitud.

Definición 18.1.2

Dos arcos de una misma circunferencia o de circunferencias congruentes son congruentes si y sólo si tienen igual medida (figura 18.3).

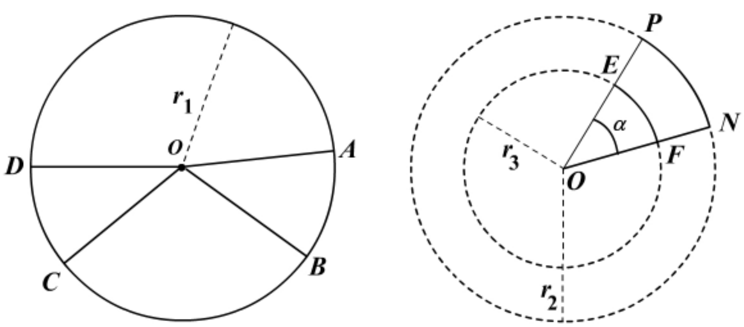


Figura 18.3

Es decir:

a. $\widehat{AB} \cong \widehat{CD} \Leftrightarrow m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$

b. $\widehat{AB} \cong \widehat{PN} \Leftrightarrow m(\widehat{AB}) = m(\widehat{PN})$

Observamos también en la figura 18.3 que $m(\widehat{PN}) = m(\widehat{EF}) = m(P\hat{O}N) = \alpha º$, por ser arcos intersecados por el ángulo central PON; pero la longitud de los arcos PN y EF son diferentes así tengan la misma medida en grados.

Postulado 18.1.1 (De la adición de arcos)
Si A, B y C son puntos sobre una circunferencia y en ese orden, entonces $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{AB}) + m(\widehat{BC})$.

Menelao de Alejandría

Este matemático cultivó la astronomía y la geometría en Alejandría y en Roma. Entre sus obras más importantes están *Cuerdas en un círculo* y *Elementos de geometría*, pero la única que ha sobrevivido, y sólo en su versión árabe, es su *Esférica*, un sistemático estudio de las propiedades de los triángulos esféricos, es decir, un triángulo cortado por una recta o un gran círculo (*teoremas de Menelao*), que constituyen las bases de la trigonometría esférica.

Corolario 18.1.1 (De la sustracción de arcos)
Si A, B y C son puntos de una circunferencia y en ese orden, entonces $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{ABC}) - m(\overset{\frown}{BC})$. Esta relación es llamada sustracción de arcos.

Los dos teoremas siguientes son una consecuencia inmediata de la definición dada sobre la medida de un arco de circunferencia. Su demostración se deja como ejercicio.

Teorema 18.1.1

En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, ángulos centrales congruentes subtienden arcos congruentes.

Teorema 18.1.2

En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, los arcos congruentes son subtendidos por ángulos centrales congruentes.

18.2 Posiciones relativas

En un mismo plano las posiciones relativas de un punto y de una recta respecto a una circunferencia están determinadas por sus respectivas distancias al centro de la circunferencia.

Sea d la distancia de un punto P al centro de una circunferencia de centro O y de radio r en un mismo plano (figura 18.4).

Si $d > r$, P es exterior a la circunferencia.
Si $d = r$, P está en la circunferencia.
Si $d < r$, P es interior a la circunferencia.

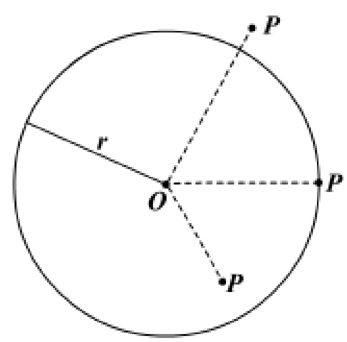


Figura 18.4

Si una recta ℓ y una circunferencia (O, r) son coplanares y además d es la distancia de la recta al centro O, entonces, de la figura 18.5, obtenemos:

a. Si $d > r$, la recta ℓ es *exterior* a la circunferencia.
b. Si $d = r$, la recta ℓ es *tangente* a la circunferencia.

c. Si $d < r$, la recta ℓ es secante a la circunferencia.

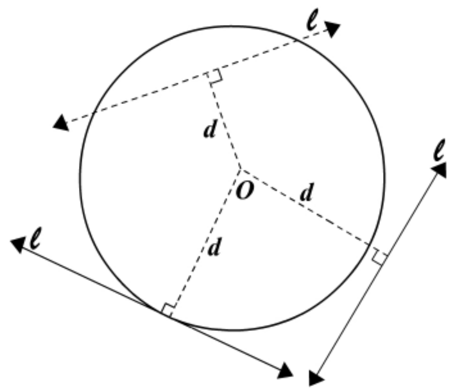


Figura 18.5

Si dos circunferencias $C_1\,(O_1, r_1)$ y $C_2\,(O_2, r_2)$ están en el mismo plano, las posiciones relativas entre ellas pueden relacionarse con la distancia d entre sus centros de la siguiente manera:

a. Dos circunferencias son exteriores si la distancia entre sus centros es mayor que la suma de sus radios (figura 18.6).

C_1 y C_2 son exteriores

$d = d\,(O_1, O_2)$

$d > r_1 + r_2$

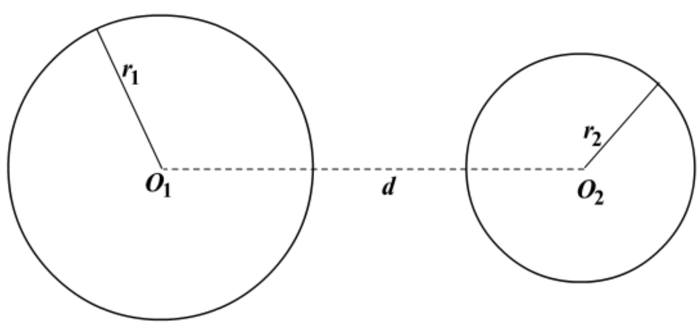


Figura 18.6

b. Dos circunferencias son tangentes exteriores si son tangentes a la misma recta en el mismo punto (su intersección es un punto).

Si la distancia entre los centros $d = r_1 - r_2$, las dos circunferencias son tangentes interiores (figura 18.7).

Si la distancia entre los centros $d = r_1 + r_2$, las dos circunferencias son tangentes exteriores (figura 18.8).

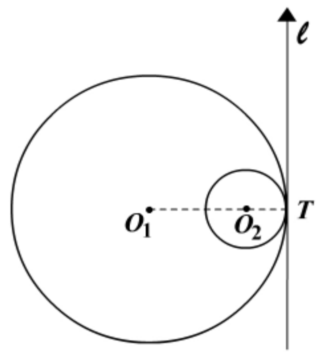


Figura 18.7

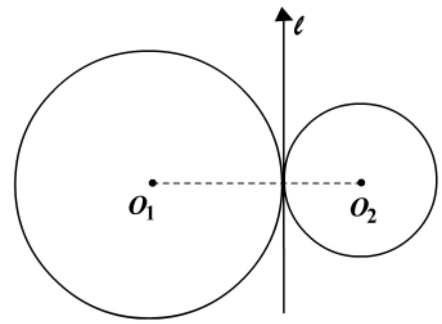


Figura 18.8

c. Si la distancia entre los centros es menor que la diferencia entre los radios decimos que las circunferencias son interiores, y específicamente si $r_1 > r_2$, entonces la circunferencia O_2 es interior a la circunferencia O_1 (figura 18.9).

d. Si la distancia entre los centros de dos circunferencias varía entre la diferencia y la suma de los radios $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$, decimos que las circunferencias son secantes (se intersecan en dos puntos) (figura 18.10).

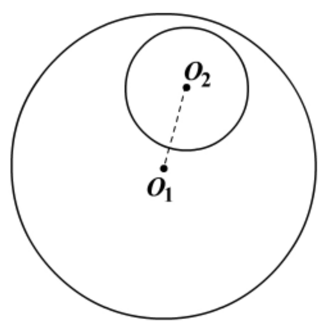


Figura 18.9

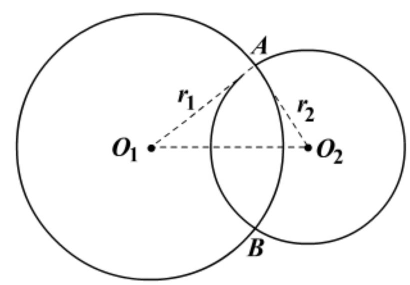


Figura 18.10

e. Si la distancia entre los centros es O pero los radios son diferentes, decimos que las circunferencias son concéntricas $\left(d = 0 \text{ y } r_1 \neq r_2\right)$ (figura 18.11).

f. Si la distancia entre los centros es O y los radios son iguales, $r_1 = r_2$, decimos que las circunferencias son coincidentes o iguales (figura 18.12).

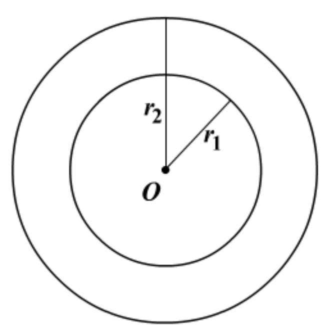


Figura 18.11

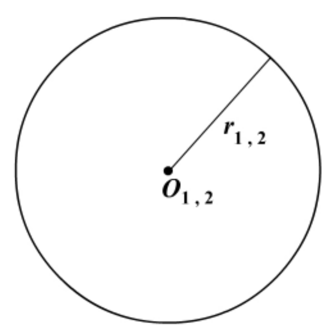


Figura 18.12

18.3 Rectas tangentes

Vimos en el apartado 18.2 que si una recta y una circunferencia en un mismo plano se intersecaban en un punto, entonces la circunferencia y la recta son tangentes y el punto se llama punto de tangencia (figura 18.13).

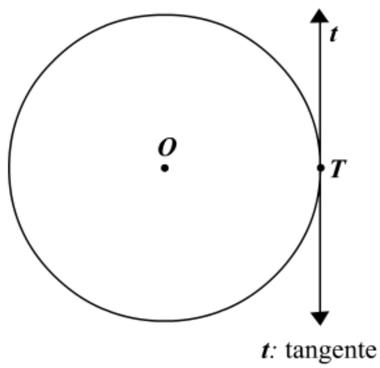
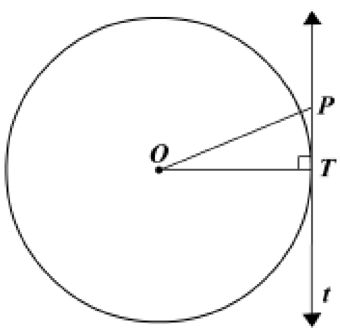


Figura 18.13

Teorema 18.3.1

Una recta perpendicular al segmento radial de una circunferencia en su extremo externo es tangente a la circunferencia (figura 18.14).



Hipótesis: $C(O,r)$ y t coplanares

OT segmento radial

$t \perp \overline{OT}$ en T

Tesis: t es tangente a $C(O,r)$

Figura 18.14

Demostración (reducción al absurdo)

De la hipótesis, la recta t es perpendicular al segmento radial OT en el punto T. Demostremos que ningún otro punto de la recta t pertenece a la circunferencia.

Sea P otro punto de la recta y supongamos que P pertenece a la circunferencia, lo cual implica que $OP = OT$ por ser radios de la misma circunferencia. Por tanto el ΔOTP sería isósceles, y como los ángulos de la base son congruentes entonces el ángulo OTP sería también recto, lo cual es una contradicción porque desde un punto exterior (O) a una recta (t) se puede bajar una y sólo una recta $\left(\overline{OT} \perp t\right)$ $\overline{OT}$ perpendicular a la recta dada. Luego P no pertenece a la circunferencia y t es tangente a la circunferencia.

Teorema 18.3.2 (recíproco del teorema 18.3.1)

Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al segmento radial en el punto de tangencia (figura 18.15).

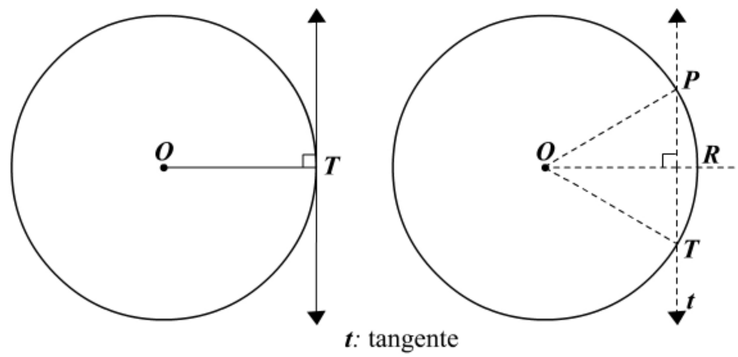


Figura 18.15

Hipótesis: $C(O, r)$

t tangente en T

OT segmento radial

Tesis: $t \perp \overline{OT}$

Demostración (reducción al absurdo)

La recta t es tangente a la circunferencia en el punto *T*, lo cual se concluye de la hipótesis.

$t \perp \overline{OT}$, o bien t no es $\perp \overline{OT}$ (ley o principio del tercero excluido). ¿Qué ocurre si $t \perp \overline{OT}$?

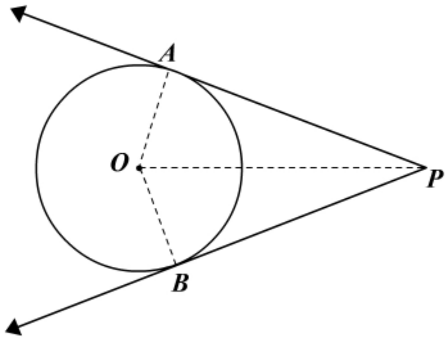
Supongamos que t no es perpendicular a $\overline{OT}$, y sea $\overline{OR} \perp t$. Entonces $R \neq T$. Sea P un punto de t tal que $RP = RT$. Entonces, $\Delta ORP \cong \Delta ORT$ (C-C). En consecuencia $OP = OT = r$ y el punto P está en la circunferencia. Por consiguiente la recta t interseca a la circunferencia en dos puntos T y P, lo cual es imposible porque t es tangente a la circunferencia en *T*. Luego el supuesto es falso y $t \perp \overline{OT}$ en *T*.

Corolario 18.3.1

Toda recta perpendicular a una tangente en el punto de tangencia pasa por el centro del círculo.

Teorema 18.3.3: De las tangentes

Los segmentos tangentes trazados a una circunferencia desde un punto exterior son congruentes y determinan ángulos congruentes con la recta que pasa por el centro y el punto de intersección de las tangentes (figura 18.16).



Hipótesis: $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ tangentes a $C(O,r)$

Tesis: $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

$A\hat{P}O \cong B\hat{P}O$

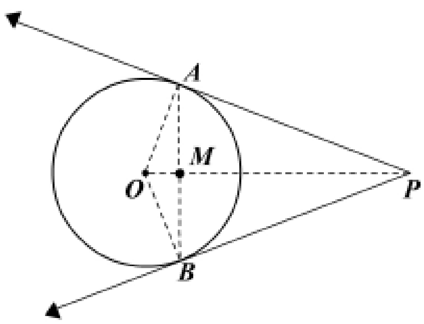
Figura 18.16

Demostración

Trazamos los segmentos radiales OA y OB que son perpendiculares a $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ en A y B, respectivamente (teorema 18.3.2). En consecuencia $\Delta AOP \cong \Delta BOP$ (H-C) y concluimos que $PA = PB$ y $A\hat{P}O \cong B\hat{P}O$ por ser elementos correspondientes en triángulos congruentes.

Ejemplo 18.2.1

Demostrar que la recta que une el punto de intersección de dos rectas tangentes a una circunferencia O y el centro es mediatriz de la cuerda que une los puntos de tangencia (figura 18.17).



Hipótesis: $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ tangentes a la $C(O,r)$ AB cuerda

$\overline{OP} \cap \overline{AB} = \{M\}$

Tesis: $\overleftrightarrow{OP}$ mediatriz de $\overline{AB}$

Figura 18.17

Demostración

Trazamos los segmentos radiales $OA = OB = r$, que son perpendiculares a $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ en A y B, respectivamente.

$\Delta AOP \cong \Delta BOP$ (¿por qué?). Luego $A\hat{O}P \cong B\hat{O}P$ y $\overrightarrow{OM}$ bisectriz de $B\hat{O}A$. Como el ΔBOA es isósceles y $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz a la base, entonces $\overline{OM}$ es mediana y está contenida en la mediatriz de $\overline{AB}$. Por ser $O - M - P$, concluimos que $\overleftrightarrow{OP}$ es mediatriz de $\overline{AB}$.

Ejercicios

Módulo 18

1. Si M es un punto de una circunferencia:

   a. ¿Cuántas rectas tangentes a la circunferencia O contienen el punto M?
   b. ¿Cuántas circunferencias tangentes a la circunferencia dada pasan por M?

2. Demuestre que las rectas tangentes a una circunferencia O en los extremos de un diámetro son paralelas.

3. Demuestre que si dos circunferencias son tangentes, sus centros y el punto de tangencia son colineales.

4. Demuestre que dos circunferencias congruentes son tangentes exteriores y entonces cualquier punto que equidiste de sus centros pertenece a la recta tangente común.

5. Demuestre que en todo triángulo rectángulo circunscrito la suma de las medidas de los catetos es igual a la suma de las medidas de la hipotenusa y el diámetro de la circunferencia.

6. Demuestre que en todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia la suma de las medidas de dos lados opuestos es igual a la suma de las medidas de los otros dos lados.

7. $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ son tangentes a una circunferencia O y la recta OP corta al arco AB en M, con $O-M-P$. Demuestre que $\overleftrightarrow{OP}$ biseca el arco AB y que $O\hat{B}A \cong O\hat{P}B$.

8. Sean las circunferencias O_1 y O_2 y las rectas ℓ_1 y ℓ_2, tangentes a O_1 y O_2 en A, B y en C, D, respectivamente. Demuestre que $AB = CD$ (ℓ_1 y ℓ_2 se llaman tangentes interiores) (figura 1).

9. ℓ_1 y ℓ_2 son rectas tangentes a la circunferencias de centros O_1 y O_2 en A, B y en C, D, respectivamente (figura 2). Demuestre que $AB = CD$ (ℓ_1 y ℓ_2 se llaman tangentes exteriores). ¿Cuándo ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas?

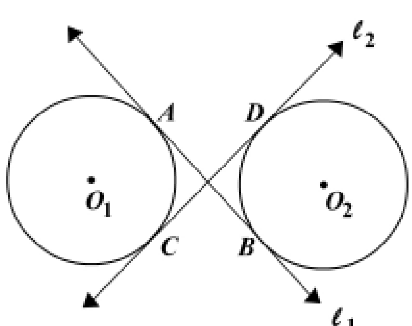


Figura 1

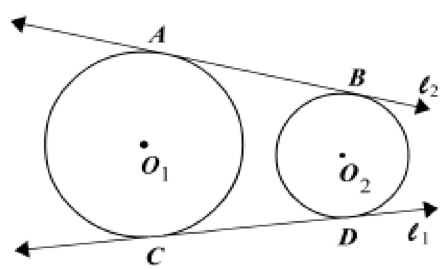


Figura 2

10. Las tangentes interiores a dos circunferencias O_1 y O_2 se cortan en M y las tangentes exteriores a las mismas circunferencias se cortan en P. Demuestre que los puntos O_1, M, O_2 y P son colineales y $\overleftrightarrow{OP}$ es bisectriz de los ángulos en M y P.

11. En la figura 3:

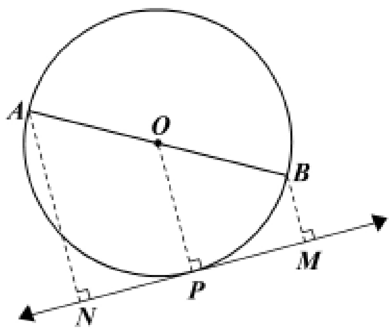


Figura 3

Hipótesis: ℓ es tangente a la circunferencia O en P.

$\overline{AB}$ cuerda diametral

$\overline{AN} \perp \ell$; $\overline{BM} \perp \ell$

Tesis: $\overline{ON} \cong \overline{OM}$

12. AB es una cuerda de una circunferencia y a su vez es tangente a otra circunferencia concéntrica con la anterior. Demuestre que la cuerda es bisecada en el punto de tangencia.

13. Se traza una cuerda que corta a dos círculos concéntricos, a la circunferencia interior en A y B y a la circunferencia exterior en C y D. Demuestre que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

14. Sean las circunferencias coplanares $C_1(O_1, 7\,\text{cm})$ y $C_2(O_2, 13\text{ cm})$. Halle los valores de las distancias entre los centros si C_1 y C_2 son: exteriores, tangentes exteriores, tangentes interiores, interiores, secantes.

15. Sean las circunferencias $C_1(O_1, 7\text{cm})$ y $C_2(O_2, r_2)$ en un mismo plano y $d = d(O_1, O_2) = 11\text{cm}$. Halle todos los valores de r_2 para que C_1 y C_2 sean: exteriores, tangentes interiores, tangentes exteriores, interiores.

16. Sean $C_1(O_1, r_1)$ y $C_2(O_2, 10\,\text{cm})$ dos circunferencias en un mismo plano y sea $d = d = (O_1, O_2) = 6\,\text{cm}$. Halle (si existen) los valores de r_2 para que C_1 y C_2 sean: exteriores, tangentes exteriores, tangentes interiores, interiores, secantes.

Módulo 19

Arcos y ángulos

Contenidos del módulo

19.1 Arcos y cuerdas
19.2 Arcos y ángulos

Objetivos del módulo

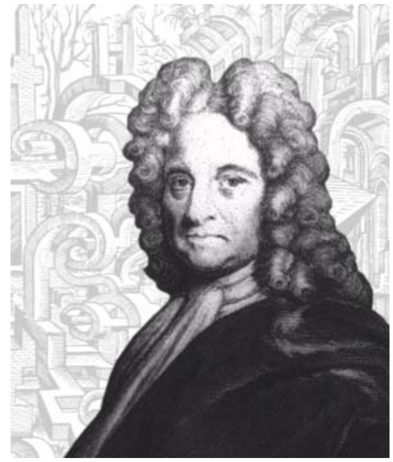
1. Relacionar los arcos y las cuerdas en el círculo.
2. Determinar la congruencia de cuerdas.
3. Definir los ángulos relacionados con la circunferencia.
4. Establecer la medida del ángulo inscrito, del semiinscrito, del exterior y del interior en la circunferencia.

Preguntas básicas

1. ¿Qué relación hay entre las cuerdas y los arcos intersecados?
2. ¿Cuándo dos cuerdas son congruentes?
3. ¿Existe alguna relación entre una secante y una cuerda?
4. ¿Qué es un ángulo:
   a. Inscrito?
   b. Semiinscrito?
   c. Exterior a una circunferencia?
   d. Interior a una circunferencia?
5. ¿Cómo se miden los ángulos anteriores?

Introducción

Se inicia en este módulo el estudio de la relación que hay entre los arcos y las cuerdas que unen sus extremos; luego se analiza la congruencia de cuerdas y finalmente se definen los diferentes ángulos relacionados con la circunferencia y se halla una expresión para la medida de cada uno de ellos en función del arco intersecado.



Edmund Halley

(1656-1742). Astrónomo británico nacido en Londres y muerto en Greenwich.

Vea el módulo 19 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

19.1 Arcos y cuerdas

En el capítulo 2 vimos que si A y B son dos puntos de la circunferencia O, entonces obteníamos el arco AB subtendido por la cuerda AB.

Teorema 19.1.1

En un mismo círculo o en círculos congruentes dos cuerdas congruentes subtienden arcos congruentes (figura 19.1).

Hipótesis: $C(O_1, r_1) \cong C(O_2, r_2)$

AB, CD cuerdas; $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Tesis: $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$

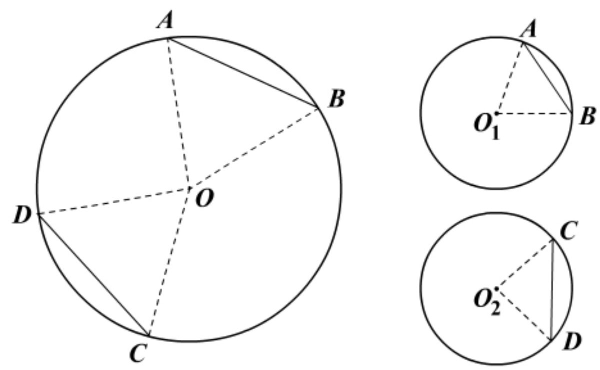


Figura 19.1

Demostración

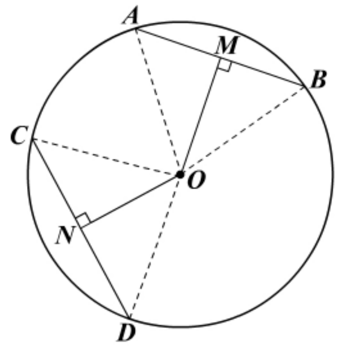
Trazamos los segmentos radiales OA, OB, OC y CD. En consecuencia $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (L-L-L) y por tanto $A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$. Luego $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{DC}$ (teorema 18.1.1).

Teorema 19.1.2 (recíproco del teorema 19.1.1)

En un mismo círculo o en círculos congruentes dos arcos congruentes subtienden cuerdas congruentes. Su demostración se deja como ejercicio.

Teorema 19.1.3

En un mismo círculo o en círculos congruentes dos cuerdas congruentes equidistan (están a igual distancia) del centro (figura 19.2).



Hipótesis: círculo (O,r)

$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cuerdas

$\overline{OM} \perp \overline{AB}$, $\overline{ON} \perp \overline{CD}$

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Tesis: $OM = ON$

Figura 19.2

Demostración

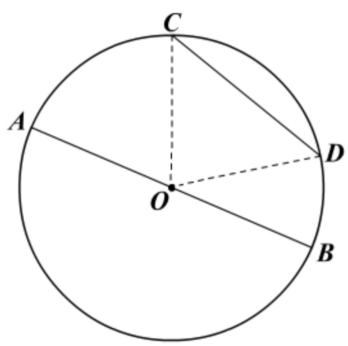
Trazamos los segmentos radiales OA, OB, OC y $CD.$ En consecuencia $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (L-L-L) y $OM = ON$ por ser alturas correspondientes en triángulos congruentes.

Teorema 19.1.4 (recíproco del teorema 19.1.3)

En un mismo círculo o en círculos congruentes, si dos cuerdas equidistan del centro, son congruentes. La demostración se deja como ejercicio.

Teorema 19.1.5

En todo círculo la cuerda diametral es la mayor de las cuerdas (figura 19.3).



Hipótesis: círculo (O,r)

$\overline{AB}$ cuerda diametral

$\overline{CD}$ cuerda del $\overline{C}$ (O,r)

Tesis: $AB > CD$

Figura 19.3

Demostración

Trazamos los segmentos radiales OC y $OD.$ En el ΔOCD, por la desigualdad triangular se tiene que $OC + OD > CD,$ pero $OC = OD = r.$ Por tanto $2r > CD$ y $AB = 2r = d$ por ser diámetro, entonces $AB > CD.$

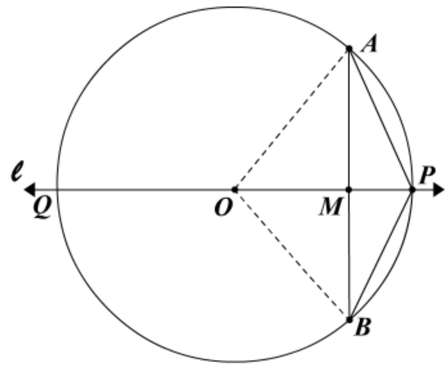
Edmund Halley

A Halley se le conoce principalmente por los estudios que realizó sobre la periodicidad de los cometas, aunque también hizo otros aportes astronómicos muy importantes como el catálogo de los cielos del sur (*Catalogus stellarum australium*), los métodos para medir la distancia al Sol a través del tránsito de los planetas, el establecimiento del movimiento estelar, la aceleración secular de la Luna y la existencia de movimiento propio en las estrellas. En 1682 observó y calculó la órbita del cometa que lleva su nombre y anunció que se le vería nuevamente a finales de 1758, de acuerdo con una teoría suya que proponía que había cometas con trayectorias elípticas asociados al sistema solar.

En su obra más importante, *Synopsis astronomiae cometicae*, aplicó las leyes del movimiento de Newton a todos los datos disponibles sobre los cometas. Se le considera el padre de la geofísica. Estudió el magnetismo de la Tierra y desarrolló una teoría acerca de él; determinó la ley de los polos magnéticos, la relación entre la presión barométrica y el clima, publicó ensayos sobre óptica y navegación y fue uno de los pioneros en la realización de estadísticas sociales.

Teorema 19.1.6

Toda recta que pasa por el centro de un círculo y es perpendicular a una cuerda, biseca la cuerda y los arcos intersecados (figura 19.4)



Hipótesis: círculo (O, r)
la recta ℓ pasa por O,
$\ell \perp \overline{AB}$ en M y corta a la circunferencia en Q y P

Tesis: $\overline{AM} \cong \overline{BM}$; $\widehat{AP} \cong \widehat{BP}$
$\widehat{AQ} \cong \widehat{BQ}$

Figura 19.4

Demostración

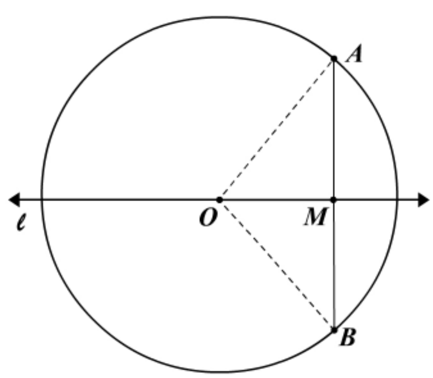
Trazamos los segmentos radiales OA y OB. En el triángulo isósceles AOB, $\overline{OM}$ es altura a la base $(\ell \perp \overline{AB})$ y por consiguiente es mediana, o sea que $\overline{AM} \cong \overline{BM}$.

Como $\overline{OM}$ además es bisectriz del ángulo opuesto a la base, entonces $A\hat{O}M \cong B\hat{O}M$ y $\widehat{AP} \cong \widehat{BP}$ (teoremas 18.1.1 y 19.1.2).

Demuestre que $\widehat{AQ} \cong \widehat{BQ}$.

Teorema 19.1.7

Si una recta que pasa por el centro biseca una cuerda no diametral, es perpendicular a la cuerda (figura 19.5).



Hipótesis: círculo (O, r)
$O \in$ de recta ℓ
ℓ corta a $\overline{AB}$ en M
$\overline{AM} \cong \overline{BM}$

Tesis: $\ell \perp \overline{AB}$

Figura 19.5

Demostración

Trazamos los segmentos radiales OA y OB. En consecuencia $\Delta AOM \cong \Delta BOM$ por L-L-L. Luego $O\hat{M}A \cong O\hat{M}B$ son par lineal y $O\hat{M}A$ y $O\hat{M}B$ son rectos y sus lados perpendiculares, o sea que $\overline{OM} \perp \overline{AB}$. Concluimos que $\ell \perp \overline{AB}$ $(O, M \in \ell)$.

Corolario 19.1.1

La mediatriz de una cuerda pasa por el centro del círculo y biseca los arcos intersecados.

Ejemplo 19.1.1

Del vértice A de un triángulo equilátero ABC, con un lado como radio, se describe entre B y C un arco de circunferencia (menor a una semicircunferencia); se toma sobre el arco un punto D cualquiera y se une con B y C. Demostrar que el segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ es perpendicular al segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

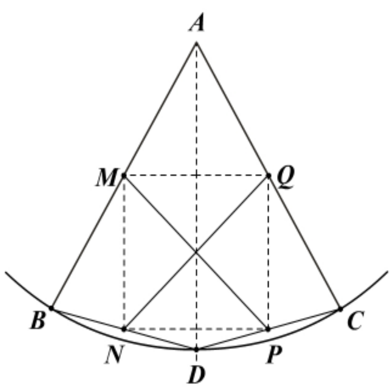


Figura 19.6

Hipótesis: ΔABC equilátero
arco $A(\widehat{BC})$, radio AB
D pertenece a $\widehat{BC}$
N punto medio de $\overline{BD}$
P punto medio de $\overline{DC}$
M punto medio de $\overline{AB}$
Q punto medio de $\overline{AC}$

Tesis: $\overline{PM} \perp \overline{NQ}$

Demostración

Trazamos $\overline{NP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QM}$, $\overline{MN}$ y $\overline{AD}$.

Aplicando el teorema de la paralela media en los diferentes triángulos obtenemos:

$$MQ = \frac{BC}{2} = NP. \qquad (1)$$

$$PQ = \frac{AD}{2} = MN. \qquad (2)$$

Como el ΔABC es equilátero y el radio de BC es igual al lado del triángulo, obtenemos:

$$AB = AC = BC = AD. \qquad (3)$$

De (1), (2) y (3) tenemos que $MQ = QP = PN = NM$; luego $MNPQ$ es un rombo y sus diagonales son perpendiculares y por tanto $\overline{PM} \perp \overline{QN}$.

Ejemplo 19.1.2

Un triángulo ABC está inscrito en un círculo O, sus alturas se cortan en H, P es punto medio de $\overline{AB}$, Q es punto medio de $\overline{AC}$, N es punto medio de $\overline{AH}$. Demostrar que $OPNQ$ es un paralelogramo.

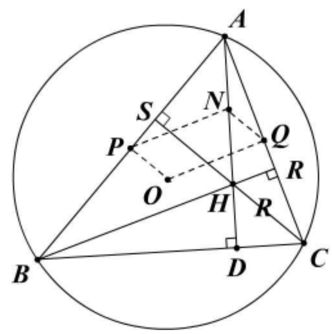


Figura 19.7

Hipótesis: círculo O
ΔABC inscrito
$\overline{BR}$, $\overline{AD}$ y $\overline{CS}$ alturas
H ortocentro
Q punto medio de $\overline{AC}$
P punto medio de $\overline{AB}$
N punto medio de $\overline{AH}$

Tesis: $OPNQ$ es un paralelogramo

Demostración

Trazamos $\overline{OP}$, $\overline{PN}$, $\overline{NQ}$ y $\overline{OQ}$.

$\overline{OP} \perp \overline{AB}$ (teorema 19.1.7) y $\overline{CS} \perp \overline{AB}$ ($\overline{CS}$ altura), luego $\overline{OP} \parallel \overline{CS}$. (1)

$\overline{OQ} \perp \overline{AC}$ (teorema 19.1.7) y $\overline{BR} \perp \overline{AC}$ ($\overline{BR}$ altura), luego $\overline{OQ} \parallel \overline{BR}$. (2)

Por el teorema de la paralela media:

$\overline{NQ} \parallel \overline{CH}$ ($\parallel \overline{CS}$). (3)

$\overline{PN} \parallel \overline{BH}$ ($\parallel \overline{BR}$). (4)

De (1) y (3) obtenemos $\overline{OP} \parallel \overline{NQ}$, y de (2) y (4) $\overline{OQ} \parallel \overline{PN}$.

Por tanto $OPNQ$ es un paralelogramo.

19.2 Arcos y ángulos

Vimos en el módulo 18 la relación que existe entre un ángulo central en una circunferencia y el arco intersecado. Veremos a continuación la relación que hay entre los diferentes ángulos relacionados con la circunferencia y los arcos intersecados por ellos.

Definición 19.2.1: Ángulo inscrito

Un ángulo está inscrito en un círculo si y sólo si su vértice está sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas (figura 19.8).

Teorema 19.2.1

La medida de un ángulo inscrito en un círculo es igual a la mitad de la medida del arco intersecado. Se considerarán tres situaciones diferentes, como se ilustra en la figura 19.8.

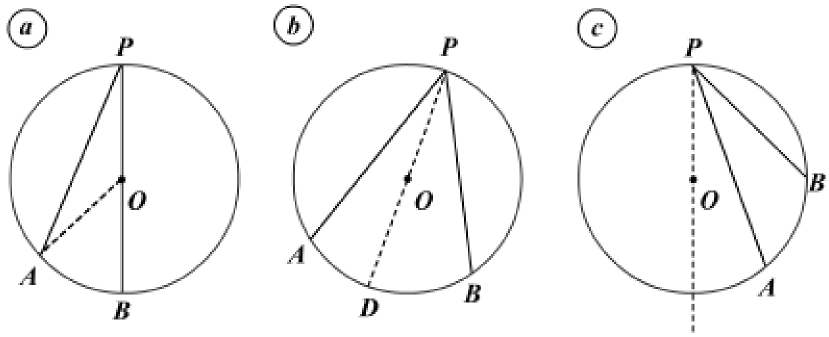


Figura 19.8

Hipótesis: el ángulo APB es inscrito

Tesis: $m(A\hat{P}B)=\frac{1}{2}m(\widehat{AB})$

Demostración

a. Un lado del ángulo coincide con el diámetro:

Trazamos el segmento radial OA. Entonces $OA=OP$ y el ΔPOA es isósceles. Por tanto $m(O\hat{P}A)=m(O\hat{A}P)$ y $m(B\hat{O}A)=2m(O\hat{P}A)$ por ser el ángulo BOA exterior al ΔPOA.

Pero $m(B\hat{O}A)=m(\widehat{AB})$ por ser el ángulo BOA central. Por sustituciones queda: $m(O\hat{P}A)=\frac{1}{2}m(B\hat{O}A)=\frac{1}{2}m(\widehat{AB})$.

b. El diámetro es interior al ángulo APB:

$m(A\hat{P}B)=m(A\hat{P}D)+m(D\hat{P}B)$.

Según el numeral *a*, $m(A\hat{P}D)=\frac{1}{2}m(\widehat{AD})$ y $m(D\hat{P}B)=\frac{1}{2}m(\widehat{DB})$.

Luego $m(A\hat{P}B)=\frac{1}{2}m(\widehat{AD})+\frac{1}{2}m(\widehat{DB})$.

$\therefore\ m(A\hat{P}B)=\frac{1}{2}m(\widehat{AB})$.

c. El diámetro es exterior al ángulo *APB*.
Se deja como ejercicio.

Corolario 19.2.1

Los ángulos inscritos en un círculo que intersecan el mismo arco de circunferencia son congruentes (figura 19.9).

$\hat{P}_1,\ \hat{P}_2,\ \hat{P}_3,....$ son inscritos en el círculo O.

$m(\hat{P}_1)=m(\hat{P}_2)=...=\frac{1}{2}m(\widehat{AB})$.

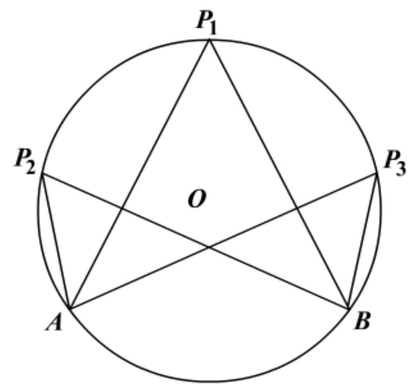


Figura 19.9

Un ángulo está inscrito en un semicírculo si su vértice está en la semicircunferencia y sus lados pasan por los extremos de la cuerda diametral (figura 19.10).

El ángulo APB está inscrito en el semicírculo de centro O.

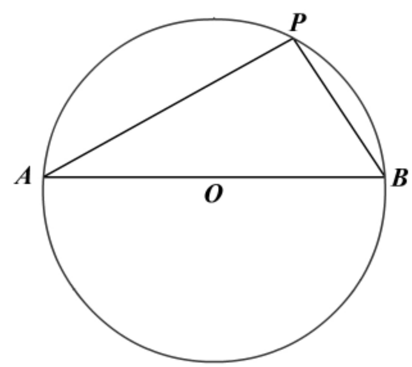


Figura 19.10

Corolario 19.2.2
Los ángulos inscritos en un semicírculo miden 90° (figura 19.10).

Corolario 19.2.3
Si un triángulo está inscrito en un círculo y uno de sus lados es una cuerda diametral, es rectángulo (figura 19.10).

Corolario 19.2.4
En un mismo círculo, rectas paralelas intersecan arcos de circunferencia congruentes (figura 19.11).

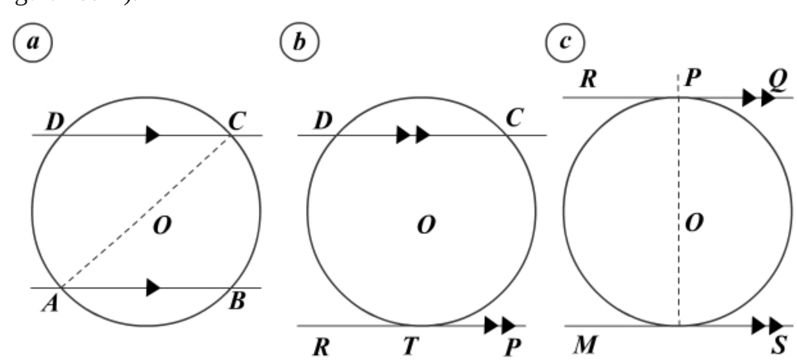


Figura 19.11

Demostración

a. Las dos rectas paralelas son secantes (figura 19.11*a*).

$m(B\hat{A}C) = m(A\hat{C}D)$ por ser ángulos alternos internos entre $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

$m(B\hat{A}C) = \frac{1}{2} m(\widehat{BC})$ y $m(A\hat{C}D) = \frac{1}{2} m = (\widehat{AD})$.

$\frac{1}{2} m(\widehat{BC}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AD})$, lo cual implica que $m(\widehat{BC}) = m(\widehat{AD})$ y

$\widehat{BC} \cong \widehat{AD}$.

b. De las dos rectas paralelas una es secante y la otra tangente (figura 19.11*b*). Se deja como ejercicio.

c. Las dos rectas paralelas son tangentes a la circunferencia (figura 19.11*c*). Se deja como ejercicio.

Definición 19.2.2: Ángulo semiinscrito

Un ángulo es semiinscrito en un círculo si y sólo si tiene su vértice en la circunferencia y un lado es una cuerda y el otro es una recta tangente (figura 19.12).

Teorema 19.2.2

La medida de un ángulo semiinscrito en un círculo es igual a la mitad de la medida del arco intersecado (figura 19.12).

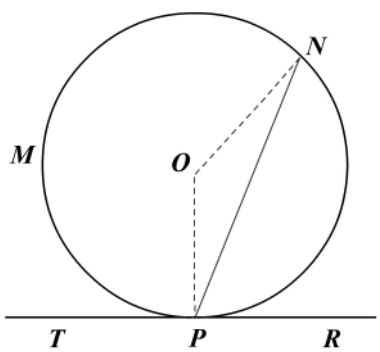


Figura 19.12

Hipótesis: $R\hat{P}N$ semiinscrito en el círculo O
PN arco intersecado

Tesis: $m(R\hat{P}N) = \frac{1}{2} m(\widehat{PN})$

Demostración

Trazamos los segmentos radiales OP y ON.

$\overline{OP} \perp \overleftrightarrow{TPR}$ por el teorema 18.3.2.

$m(R\hat{P}N) = 90^\circ - m(O\hat{P}N)$. (1)

$m(O\hat{P}N) = m(O\hat{N}P)$. (¿por qué?)

Por tanto, $2m(O\hat{P}N) = 180^\circ - m(P\hat{O}N)$

y $m(O\hat{P}N) = 90^{o} - \frac{1}{2} m(P\hat{O}N)$ (2)

Sustituyendo (2) en (1):

$$m(R\hat{P}N) = 90^{\circ} - \left(90^{\circ} - \frac{1}{2} m(P\hat{O}N)\right)$$

Simplificando:

$$m(R\hat{P}N) = \frac{1}{2} m(P\hat{O}N)$$

Como $P\hat{O}N$ es centro, su medida es la del arco intersecado PN, luego

$$m(R\hat{P}N) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{PN}).$$

En la figura 19.12 el ángulo TPN también es semiinscrito. Demuestre que su medida es la mitad de $m(\overset{\frown}{PMN})$.

Nota: el teorema anterior se puede demostrar trazando por N una paralela a $\overleftrightarrow{TR}$ y aplicando el corolario 19.2.4.

Teorema 19.2.3: Ángulo exterior

La medida de un ángulo formado por una recta tangente y una recta secante que se cortan en un punto exterior del círculo es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos intersecados (figura 19.13).

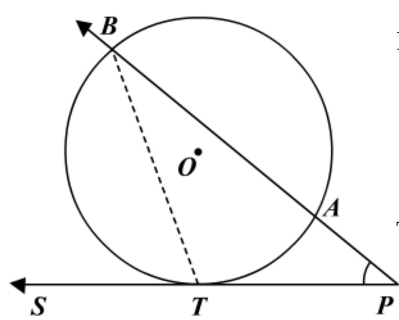


Figura 19.13

Hipótesis: círculo de centro O

$\overline{PAB}$ secante

$\overline{PT}$ tangente en T

Tesis: $m(\hat{P}) = \frac{1}{2}\left[m(\overset{\frown}{TB}) - m(\overset{\frown}{AT})\right]$

Demostración

Trazamos la cuerda BT. La $m(S\hat{T}B) = m(\hat{P}) + m(T\hat{B}P)$ por ser $S\hat{T}B$ exterior al ΔPTB. Ahora bien: $m(S\hat{T}B) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{TB})$ y $m\left(T\hat{B}P\right) = \frac{1}{2} m\left(\overset{\frown}{AT}\right)$ (teoremas 19.2.1 y 19.2.2).

Si sustituimos: $m(S\hat{T}B) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{TB}) = m(\hat{P}) + \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{AT})$.

$$\therefore m(\hat{P}) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{TB}) - \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{AT}).$$

Teorema 19.2.4: Ángulo exterior

La medida de un ángulo formado por dos tangentes a una circunferencia y que se cortan en un punto es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos intersecados (figura 19.14).

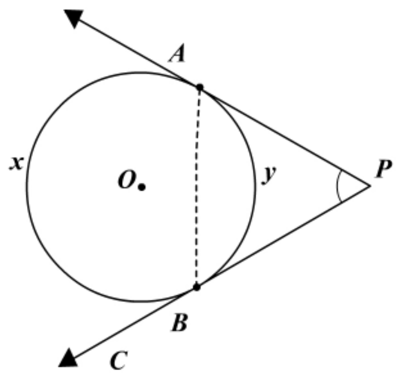


Figura 19.14

Hipótesis: círculo de centro O

$\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PB}$ tangentes

Tesis: $m(\hat{P}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{x}) - m(\overset{\frown}{y})}{2}$

Demostración

$m(C\hat{B}A) = m(B\hat{A}P) + m(\hat{P})$ (¿por qué?) (1)

Como los ángulos CBA y BAP son semiinscritos, entonces $m(C\hat{B}A) = \dfrac{1}{2} m(\overset{\frown}{x})$ y

$m(B\hat{A}P) = \dfrac{1}{2} m(\overset{\frown}{y})$. Sustituyendo en (1) y despejando $m(\hat{P})$, obtendremos:

$m(\hat{P}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{x}) - m(\overset{\frown}{y})}{2}$.

Teorema 19.2.5: Ángulo exterior

La medida de un ángulo formado por dos rectas secantes que se cortan en un punto exterior al círculo es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos intersecados por el ángulo P (figura 19.15).

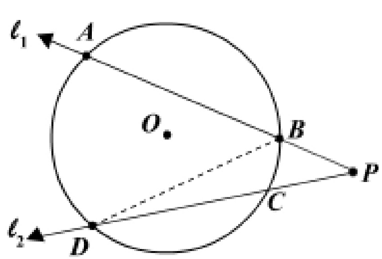


Figura 19.15

Hipótesis: ℓ_1 y ℓ_2 secantes al círculo O

$\ell_1 \cap \ell_2 = \{P\}$

$\ell_1 \cap \text{círculo} = \{A, B\}$

$\ell_2 \cap \text{círculo} = \{C, D\}$

Tesis: $m(\hat{P}) = \dfrac{1}{2}\left[m(\overset{\frown}{AD}) - m(\overset{\frown}{BC}) \right]$

Demostración

Unimos B con D (se puede unir A con C).

$m(A\hat{B}D) = m(B\hat{D}C) + m(\hat{P})$ (¿por qué?) (1)

$m\left(A\hat{B}D\right) = \frac{1}{2} m\left(\overparen{AD}\right)$ y $m\left(B\hat{D}C\right) = \frac{1}{2} m\left(\overparen{BC}\right)$ (¿por qué?)

Reemplazamos en (1) y despejamos:

$$m(\hat{P}) = \frac{m(\overparen{AD}) - m(\overparen{BC})}{2}.$$

Teorema 19.2.6: Ángulo interior

La medida de un ángulo formado por dos cuerdas que se corten en un punto P es igual a la semisuma de las medidas de los arcos intersecados por el ángulo y su opuesto por el vértice (figura 19.16).

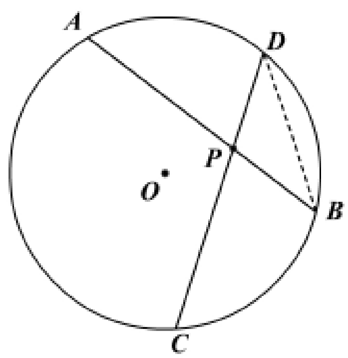


Figura 19.16

Hipótesis: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cuerdas del círculo O

$\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{P\}$

Tesis: $m(C\hat{P}B) = \frac{m(\overparen{BC}) + m(\overparen{AD})}{2}$

Demostración

Unimos B con D.

$m(C\hat{P}B) = m(C\hat{D}B) + m(A\hat{B}D)$

$m(C\hat{P}B) = \frac{1}{2} m(\overparen{BC}) + \frac{1}{2} m(\overparen{AD})$

$$\therefore\ m(C\hat{P}B) = \frac{m(\overparen{BC}) + m(\overparen{AD})}{2}$$

Si las cuerdas se cortan en la circunferencia ($P \in$ a la circunferencia) se sigue cumpliendo el teorema 19.2.6.

Nota: el ángulo *BPC* se llama ángulo interior en la circunferencia.

Teorema 19.2.7

Si un cuadrilátero está inscrito en un círculo, los ángulos opuestos son suplementarios (figura 19.17).

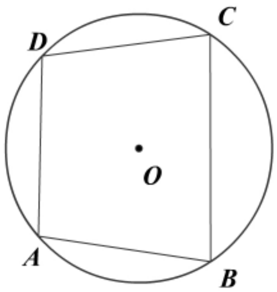


Figura 19.17

Hipótesis: cuadrilátero $ABCD$ inscrito en la circunferencia O

Tesis: $m(\hat{C}) + m(\hat{A}) = 180^{\circ}$

$m(\hat{B}) + m(\hat{D}) = 180^{\circ}$

Demostración

$m(D\hat{A}B) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{DCB})$ y $m(D\hat{C}B) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{DAB})$.

Por tanto, $m(D\hat{A}B) + m(D\hat{C}B) = \dfrac{m(\overset{\frown}{DCB}) + m(\overset{\frown}{DAB})}{2}$

$$= \frac{360^{\circ}}{2} = 180^{\circ}$$

$\therefore D\hat{A}B$ y $B\hat{C}D$ son suplementarios.

En forma similar se demuestra que $\hat{D}$ y $\hat{B}$ son suplementarios.

Teorema 19.2.8

Por tres puntos no colineales se puede trazar una y sólo una circunferencia (figura 19.18).

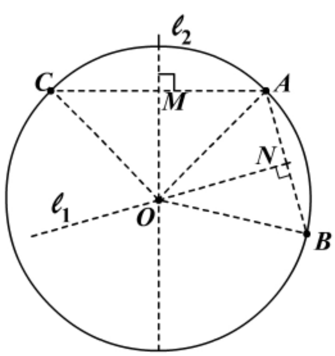


Figura 19.18

Hipótesis: A, B, C puntos no colineales

Tesis: $OA = OB = OC = r$

Construcción auxiliar

Trazamos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Trazamos ℓ_1 y ℓ_2 mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ que se cortan en O. Trazamos además los segmentos OA, OB y OC.

Demostración

$\Delta MOC \cong \Delta MOA$ (C-C): $\overline{MC} \cong \overline{MA}$ y $\overline{OM}$ común.

Luego $\overline{OC} \cong \overline{OA}$. (1)

$\Delta NOA \cong \Delta NOB$ (C-C): $\overline{NA} \cong \overline{NB}$ y $\overline{ON}$ común.

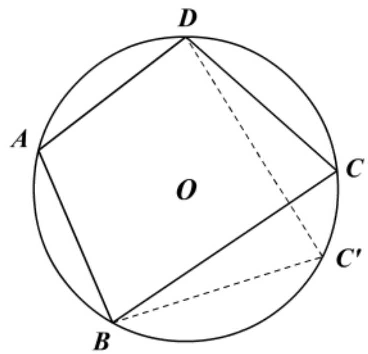
Luego $\overline{OA} \cong \overline{OB}$. (2)

Concluimos de (1) y (2) que $OA = OB = OC$. La demostración de la unicidad se deja como ejercicio.

Nota: por dos puntos A y B pasan infinitas circunferencias cuyos centros están en la mediatriz de $\overline{AB}$.

Teorema 19.2.9

Si un cuadrilátero convexo tiene dos ángulos opuestos suplementarios, es inscriptible en un círculo (figura 19.19).



Hipótesis: cuadrilátero $ABCD$

$D\hat{A}B$, $D\hat{C}B$ suplementarios

Tesis: A, B, C y D pertenecen a la circunferencia O.

Figura 19.19

Demostración

De la hipótesis tenemos que $m(D\hat{A}B) + m(D\hat{C}B) = 180^\circ$. (1)

Por A, B y D pasa una circunferencia (teorema 19.2.8). Demostremos que dicha circunferencia pasa también por C.

Sea C' un punto cualquiera del arco BD que no contiene a A y lo unimos con B y D.

$m(\hat{C}') + m(\hat{A}) = 180^\circ$. (2)

De (1) y (2) tenemos que $m(\hat{C}') = m(\hat{C}) = \dfrac{1}{2} m(\widehat{BAD})$. Luego C y C' subtienden el mismo arco y $C \in$ al arco $BC'D$. Por tanto el cuadrilátero $ABCD$ es inscriptible.

Observación: un cuadrilátero inscriptible se llama cuadrilátero cíclico.

Vimos en el capítulo 2 cuándo un polígono está inscrito o circunscrito a un círculo O.

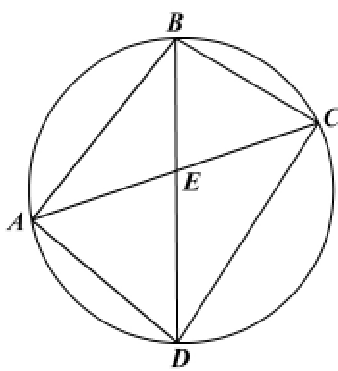
Si recordamos que un polígono es regular si es equilátero y equiángulo, tenemos por el teorema 19.1.2 que al dividir la circunferencia en n arcos congruentes obtenemos entonces un polígono equilátero de n lados inscrito en el círculo.

Si unimos el centro del círculo con cada uno de los puntos extremos de los n arcos congruentes de la circunferencia, obtenemos n ángulos centrales congruentes (¿por qué?). Entonces el número de ángulos centrales n de un polígono equilátero es igual al número de lados del polígono inscrito y cada ángulo central tiene una medida a $\frac{360º}{n}$, donde n es el número de lados del polígono.

Se llama ángulo interior del polígono al formado por dos lados consecutivos. Como todo polígono equilátero inscrito es equiángulo (¿por qué?) y la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono regular de n lados es $(n-2)\pi$, entonces la medida de un ángulo interior es $\frac{(n-2)\pi}{n} = n - \frac{2\pi}{n}$. De acá concluimos que el ángulo interior de un polígono es suplementario del ángulo central correspondiente.

Ejemplo 19.2.1

$ABCD$ es un cuadrilátero cíclico de tal manera que la cuerda AB es el lado de un cuadrado inscrito, BC es el lado de un hexágono regular inscrito y CD es el lado de un triángulo equilátero inscrito. Hallar en grados las medidas de los arcos AB, BC, CD y DA y el ángulo entre las diagonales AC y BD (figura 19.20).



Hipótesis: círculo O
$ABCD$ cíclico
AB lado de un cuadrado
BC lado de un hexágono
CD lado de un triángulo equilátero

Tesis: a. $m(\overset{\frown}{AB}), m(\overset{\frown}{BC}), m(\overset{\frown}{CD}), m(\overset{\frown}{AD})$

b. El ángulo entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

Figura 19.20

Solución

$m(\overset{\frown}{AB}) = \frac{360º}{4} = 90º$; $m(\overset{\frown}{CD}) = \frac{360º}{3} = 120º$

$m(\overset{\frown}{BC}) = \frac{360º}{6} = 60º$; $m(\overset{\frown}{AD}) = 90º$

Vemos entonces que $\overline{BD}$ es una cuerda diametral. ¿Por qué?

$$m(B\hat{E}C) = \frac{m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{AD})}{2}$$

$$= \frac{60º + 90º}{2} = 75º$$

Ejemplo 19.2.2

Demostrar que los extremos de dos cuerdas paralelas de un mismo círculo determinan otras dos cuerdas que son congruentes (figura 19.21).

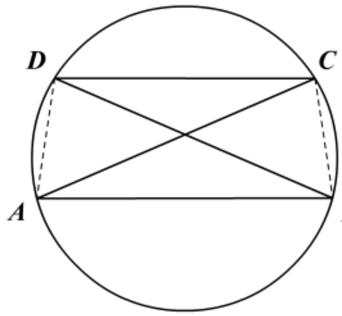


Figura 19.21

Hipótesis: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cuerdas en el círculo O

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Tesis: $\overline{AD} \cong \overline{CB}$

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Demostración

Como $\overline{DC} \parallel \overline{AB},$ entonces $\overset{\frown}{AD} \cong \overset{\frown}{CB}$ (corolario 19.2.4) y $\overline{AD} \cong \overline{CB}$ (teorema 19.1.2). $C\hat{A}B \cong D\hat{B}A$ porque subtienden arcos congruentes, $\Delta DAB \cong \Delta CBA$ (L-A-L) y en consecuencia $\overline{AC} \cong \overline{DB}.$

Ejemplo 19.2.3

En la figura adjunta (19.22):

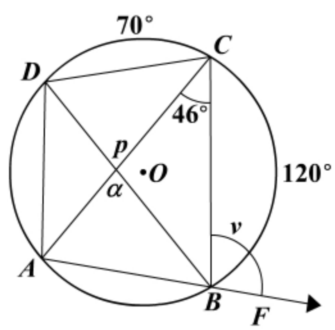


Figura 19.22

Hipótesis: círculo O, con $ABCD$ inscrito

$m(\overset{\frown}{DC}) = 70^{\circ}$

$m(\overset{\frown}{CB}) = 120^{\circ}$

$m(A\hat{C}B) = 46^{\circ}$

Tesis: $m(A\hat{P}B) = \alpha$

$m(C\hat{B}F) = \upsilon$

Solución

$m(A\hat{C}B) = 46^{\circ} = \dfrac{1}{2} m(\overset{\frown}{AB}),$ luego $m(\overset{\frown}{AB}) = 92^{\circ}$

$\alpha = \dfrac{m(\overset{\frown}{DC}) + m(\overset{\frown}{AB})}{2}$ por teorema 19.2.6.

$\alpha = \dfrac{70^{\circ} +\ 92^{\circ}}{2}$, luego $\alpha = 81^{\circ}$

$\upsilon = 180^{\circ} - m(A\hat{B}C)$

$$\upsilon = 180^\circ - \frac{m(\widehat{ADC})}{2} = 180^\circ - \frac{360^\circ - m(\widehat{AB}) - m(\widehat{BC})}{2}$$

$$\upsilon = 180^\circ - \frac{360^\circ - 92^\circ - 120^\circ}{2}, \text{ luego } \upsilon = 106^\circ.$$

El triángulo que resulta al unir los pies de las alturas de un triángulo cualquiera se llama triángulo *órtico*. Es el ΔHIJ en la figura 19.23.

Ejemplo 19.2.4

Demostrar que las alturas de un triángulo cualquiera son las bisectrices del triángulo órtico.

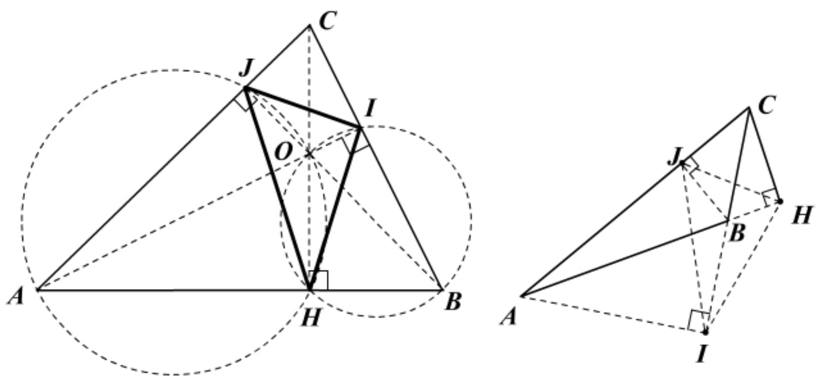


Figura 19.23

Demostración

Como AI, BJ y CH son alturas, entonces los ángulos AHC, AJB son rectos y suplementarios al igual que los ángulos BHC y BIA; luego los cuadriláteros $AHOJ$ y $BIOH$ son inscriptibles (dos ángulos opuestos son rectos).

Por subtender el mismo arco, $C\hat{A}I \cong C\hat{H}J$ y $C\hat{B}J \cong C\hat{H}I$. Tenemos además $C\hat{A}I \cong C\hat{B}J$ por tener el mismo complemento: $A\hat{C}B$. En consecuencia, $CHJ \cong CAI \cong CHI \cong CBJ$.

$\therefore \overline{HC}$ es bisectriz de $J\hat{H}I$ $(C\hat{H}J \cong C\hat{H}I)$.

En forma similar se demuestra que $\overline{BJ}$ y $\overline{AI}$ son bisectrices de los ángulos IJH y JIH, respectivamente.

Queda como ejercicio demostrar esta propiedad del triángulo órtico para el caso de la figura 19.23 (derecha).

Ejercicios
Módulo 19

1. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

- Una cuerda es un diámetro.
- Todo arco de un círculo subtiende un ángulo central.
- El vértice de un ángulo central pertenece a la circunferencia.
- La medida de un arco menor es menor que la medida de un arco mayor.
- Algunos radios son cuerdas.
- Algunos segmentos radiales son cuerdas.
- En un círculo dado una cuerda puede ser congruente a un segmento radial.
- Un diámetro es igual a una cuerda diametral.
- Una recta no puede intersecar a un círculo en más de dos puntos.
- Duplicando el arco menor de una circunferencia se duplica la cuerda.
- Una recta perpendicular a una tangente pasa por el centro de la circunferencia.
- Toda recta perpendicular a una cuerda la biseca.
- Toda recta que biseca una cuerda es perpendicular a la cuerda.
- Toda recta que pasa por el centro de un círculo biseca una cuerda.
- Toda recta que biseca un arco biseca la cuerda correspondiente.
- Un radio de un círculo es una cuerda del círculo.
- Una recta perpendicular a un radio es tangente al círculo.
- Todos los ángulos centrales de un mismo círculo son congruentes.
- Todo arco de un círculo subtiende un ángulo central de igual medida.
- Si dos cuerdas son congruentes, los ángulos centrales cuyos lados contienen sus extremos son congruentes.
- Dos cuerdas equidistantes del centro de un círculo son congruentes.
- Los lados de un polígono regular inscrito en un círculo equidistan del centro.
- Toda recta perpendicular a una cuerda pasa por el centro del círculo.
- Un trapecio inscrito en un círculo es isósceles.
- Todo paralelogramo inscrito en un círculo es un rectángulo.
- Todo polígono equilátero inscrito en un círculo es equiángulo.
- Un rombo inscrito en una circunferencia tiene que ser un cuadrado.
- Los ángulos inscritos en el mismo arco son suplementarios.
- Un rectángulo circunscrito a una circunferencia es un cuadrado.
- Todo polígono inscrito en un círculo es regular.
- La medida de un ángulo es igual a su longitud.
- Dos arcos de una misma circunferencia son congruentes si tienen igual longitud.
- Si dos cuerdas son perpendiculares a una tercera en sus puntos extremos, son congruentes.
- Un ángulo agudo inscrito siempre interseca un arco de medida menor que 90º.
- Todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es un triángulo rectángulo.
- Dos ángulos que subtienden el mismo arco son congruentes.
- Una recta que biseca una cuerda biseca el arco correspondiente.
- Toda recta que pasa por el centro es mediatriz de una cuerda.

En cada una de las siguientes figuras (2 a 5) O es el centro del círculo.

2. En la figura 1:

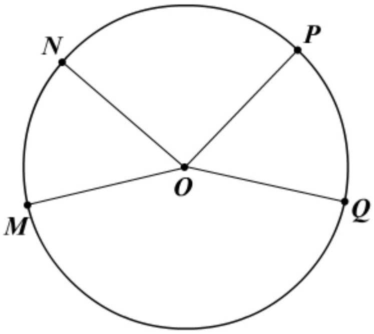


Figura 1

Hipótesis: $\overset{\frown}{NM} \cong \overset{\frown}{PQ}$

Tesis: $M\hat{O}P \cong N\hat{O}Q$

$\overline{MP} \cong \overline{NQ}$

3. En la figura 2:

a.

Hipótesis: $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{BC}$

Tesis: $\overline{AD} \cong \overline{BD}$

b.

Hipótesis: $\overline{AD} \cong \overline{BD}$

Tesis: $\overline{AM} \cong \overline{BM}$

c.

Hipótesis: $\overline{AD} \cong \overline{BD}$

Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

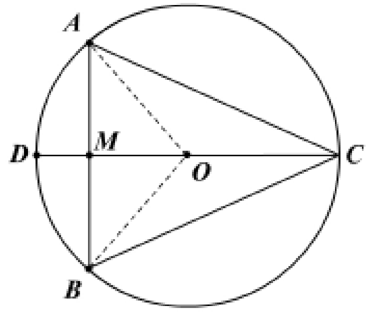


Figura 2

4. En la figura 3:

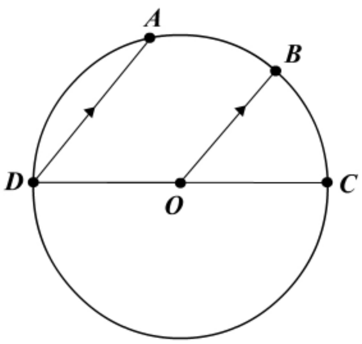


Figura 3

Hipótesis: $\overline{AD} \parallel \overline{OB}$

$C - O - D$

Tesis: $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC}$

5. En la figura 4:

a.

Hipótesis: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

$\overline{OP} \perp \overline{AB}$

$\overline{OQ} \perp \overline{CD}$

Tesis: $O\hat{P}Q \cong O\hat{Q}P$

b.

Hipótesis: $\overline{OP} \perp \overline{AB}$

$\overline{OQ} \perp \overline{CD}$

$\widehat{OPQ} \cong \widehat{OQP}$

Tesis: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

c.

Hipótesis: $\overline{OP} \perp \overline{AB}$

$\overline{OQ} \perp \overline{CD}$

$OP = OQ$

Tesis: $OC = OB$

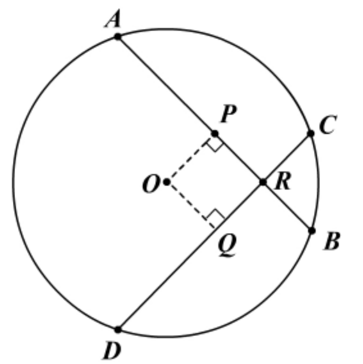


Figura 4

6. En la figura 5:

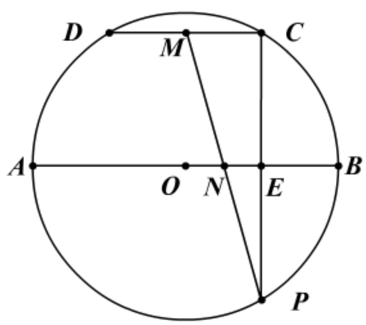


Figura 5

Hipótesis: en el círculo O, $\overline{AB}$ es cuerda diametral,

E es punto medio de $\overline{OB}$ y

$\overline{CEP} \perp \overline{AOB}$ en E

$\overline{DC} \parallel \overline{AB}$; $\overline{PM} \cap \overline{AB}$ en $\{N\}$

M punto medio de $\overline{DC}$

D, C y P están en la circunferencia O

Tesis: N punto medio de $\overline{PM}$ y $\overline{OE}$

7. Por el punto T de tangencia de dos círculos se traza una cuerda ATB. Demuestre que las tangentes en A y B son paralelas.

8. Dos círculos de centros O_1 y O_2 son tangentes en T. Se traza en O_1 la cuerda TM y en el círculo O_2 una cuerda TN perpendicular a $\overline{TM}$. Demuestre que $\overline{O_1M}$ y $\overline{O_2N}$ son paralelas.

9. En un círculo se trazan dos segmentos radiales OA y OB y una cuerda $\overline{MN}$ perpendicular a la bisectriz $\overrightarrow{OX}$ del ángulo AOB, que corta a $\overline{OA}$ en P y a $\overline{OB}$ en Q. Demuestre que $OP = OQ$ y $PA = QB$.

10. Se dan dos circunferencias concéntricas. Demuestre que las cuerdas de la circunferencia exterior que son tangentes a la circunferencia interior, son congruentes.

11. Pruebe que la cuerda menor que se puede trazar por un punto interior de una circunferencia es perpendicular a la cuerda diametral que pasa por ese punto.

12. En cada una de las siguientes figuras (6 a 23) encuentre los valores de las variables indicadas: x, y, z.

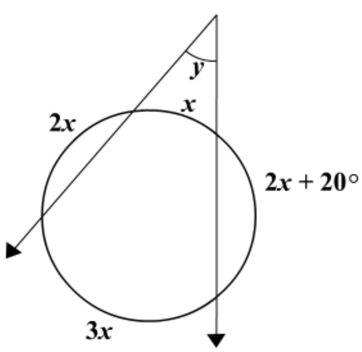


Figura 6

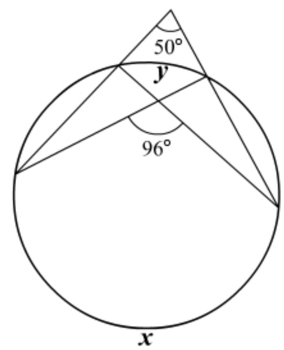


Figura 7

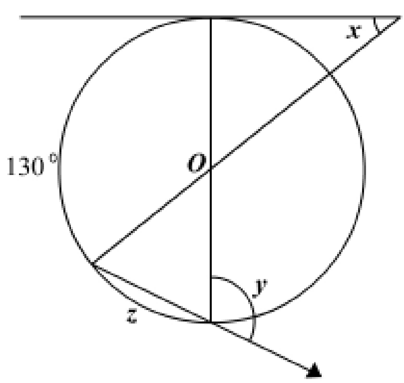


Figura 8

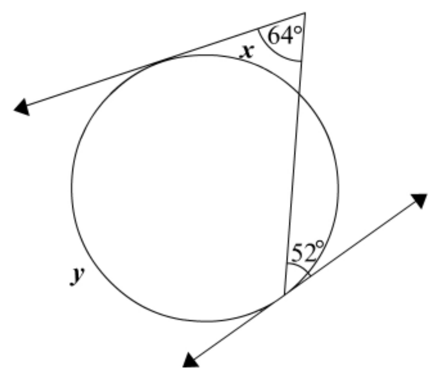


Figura 9

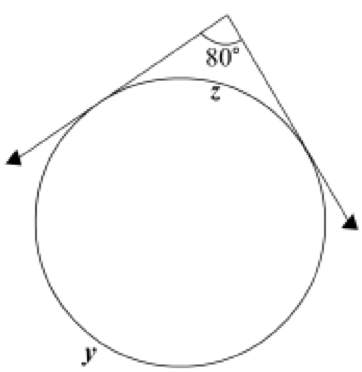


Figura 10

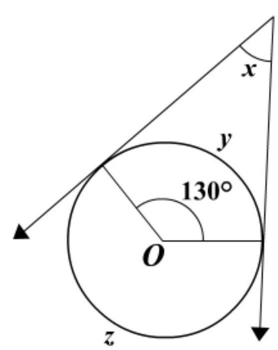


Figura 11

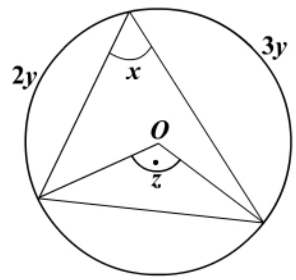


Figura 12

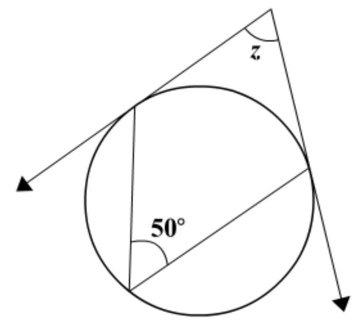


Figura 13

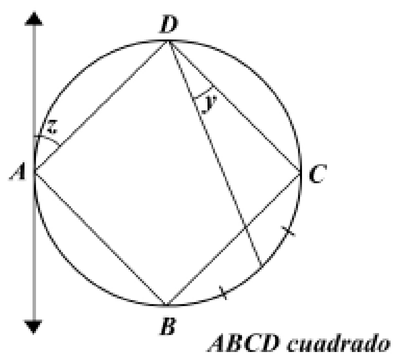


Figura 14

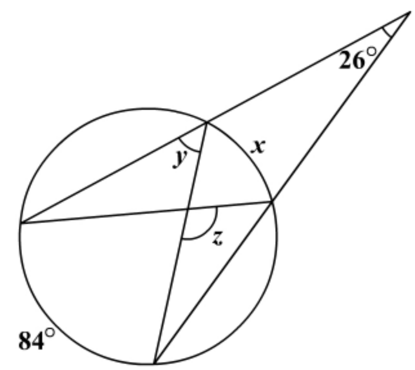


Figura 15

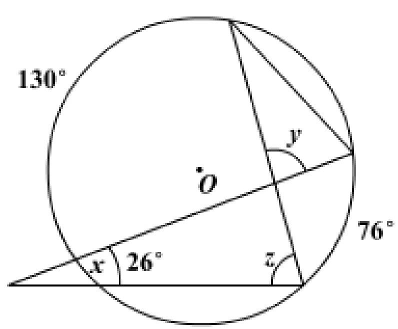


Figura 16

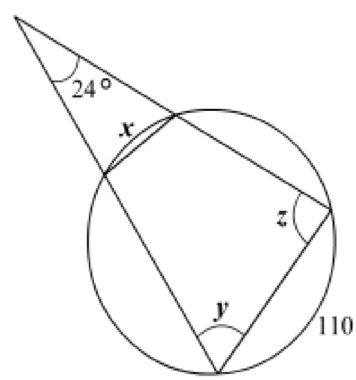


Figura 17

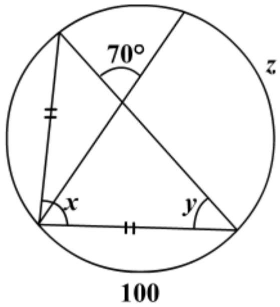


Figura 18

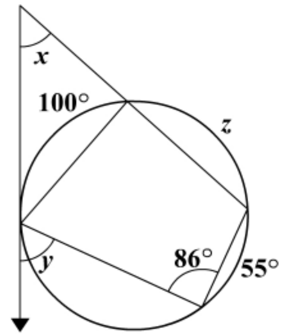


Figura 19

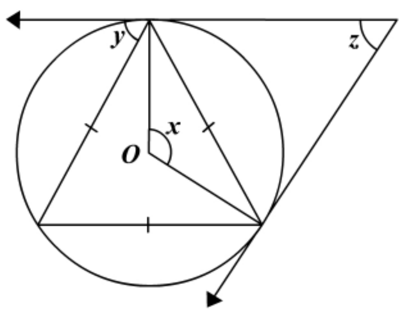


Figura 20

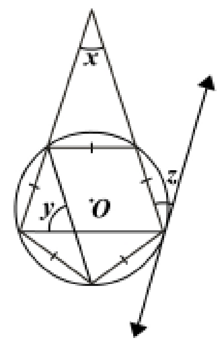


Figura 21

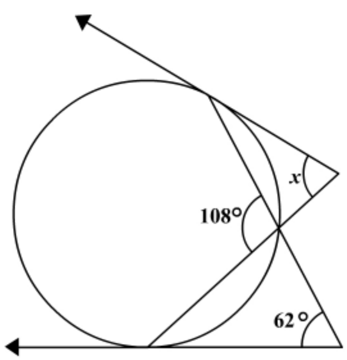


Figura 22

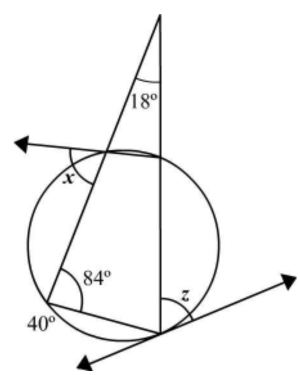


Figura 23

13. Sobre la semicircunferencia de diámetro AB se eligen los puntos D y E tales que $m(\widehat{AD}) = 90^o$ y $m(\widehat{BE}) = 72^o$; luego se trazan las cuerdas AD, DE y EB (figura 24).

a. Determine AD, DE, EB. ¿De qué polígonos son lados?

b. Halle la medida de los ángulos EAB, DBA, ADB, EDB y ACB, si C es la intersección de la prolongación de AD y BE.

c. Determine si el cuadrilátero $DCEM$ es inscriptible siendo M la intersección de $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$.

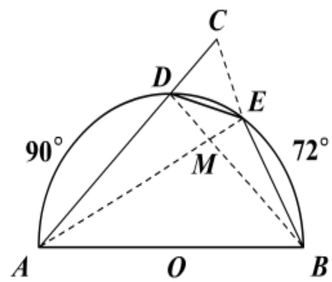


Figura 24

14. En un semicírculo de diámetro AB se traza una cuerda AC tal que $m(\widehat{BAC}) = 28^o$, y luego se traza la tangente XDZ paralela a $\overline{AC}$ (figura 25). Halle $m(\widehat{ADX})$ y $m(\widehat{BDZ})$.

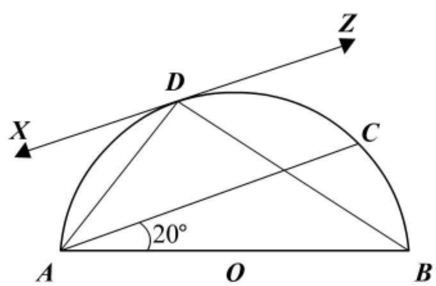


Figura 25

15. Demuestre que un trapecio isósceles es inscriptible en un círculo y que sus diagonales se cortan sobre la cuerda diametral perpendicular a las bases.

16. En una circunferencia por el punto medio A del arco BC se trazan dos cuerdas AD y AE cualesquiera que cortan la cuerda BC en M y N, respectivamente. Demuestre que el cuadrilátero $DEMN$ es inscriptible.

17. Demuestre que en un triángulo rectángulo en A, el pie de la altura AH, el vértice A y los puntos medios de los catetos están sobre una misma circunferencia. Determine además el centro y el radio de la circunferencia.

18. Las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero convexo cualquiera se cortan en los puntos M, N, P y Q. Demuestre que el cuadrilátero $MNPQ$ es cíclico.

19. D, E, y F son los pies de las alturas AD, BE y CF del triángulo ABC isósceles de vértice A, y O es el ortocentro. Muestre que el cuadrilátero $CDOF$ es inscriptible en un círculo de centro I. Pruebe que $\overline{DF}$ es tangente a la circunferencia de centro I.

20. Muestre que en un triángulo los vértices B y C y los pies H y M de las alturas BH y CM están sobre la misma circunferencia. Si $m(A) = 45º$ y $m(C) = 60º$, halle la medida de los ángulos del cuadrilátero $BCHM$. Calcule la medida de los ángulos entre las diagonales del cuadrilátero y de ellas con los lados.

Auto Evaluación

Autoevaluación

Capítulo 5
Circunferencia

Módulos 18 y 19

1. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

   - Si un ángulo inscrito y un ángulo central subtienden el mismo arco, entonces la medida del ángulo inscrito es el doble de la medida del ángulo central.
   - Si dos cuerdas congruentes se intersecan, la medida de los segmentos de una cuerda son respectivamente congruentes con los segmentos de la otra.
   - El ángulo formado por una secante y una tangente que se cortan en el exterior del círculo tiene por medida la media aritmética entre las medidas de los arcos intersecados.
   - El segmento que une los puntos de intersección de dos círculos secantes es perpendicular al segmento que une los centros.
   - Si dos arcos son congruentes, entonces el ángulo inscrito en uno de ellos es congruente con el ángulo inscrito en el otro.
   - De dos cuerdas, es mayor la que más alejada esté del centro del círculo.
   - Una recta que biseca dos cuerdas es perpendicular a cada una de ellas.
   - El radio de una circunferencia inscrita en un triángulo equilátero es igual a un tercio de la altura del triángulo.
   - Dos cuerdas congruentes que se cortan en un círculo son diagonales de un trapecio isósceles.
   - Dos cuerdas perpendiculares determinan en una circunferencia cuatro arcos tales que la suma de las medidas de dos arcos opuestos es igual a la medida de la semicircunferencia.

Los siguientes problemas (2 al 6) se resuelven de acuerdo con la figura dada.

2. En la figura 1:

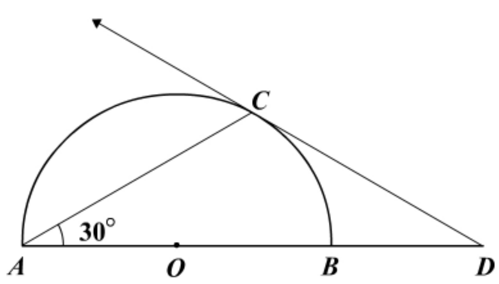


Figura 1

Hipótesis: semicírculo O

$m(B\hat{A}C) = 30º$

$A - O - B - D$

$\overline{DC}$ tangente

Tesis: ΔACD es isósceles

3. En la figura 2:

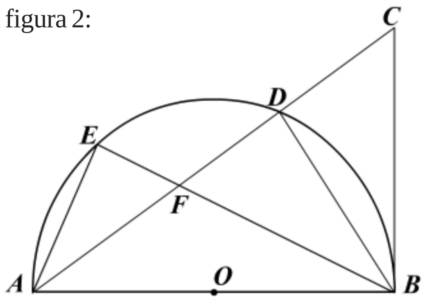


Figura 2

Hipótesis: semicírculo O

$\overline{BC}$ tangente en B

AB diámetro

$AFDC$ bisectriz de $B\hat{A}E$

Tesis: $BC = BF$; $FD = DC$

4. En la figura 3:

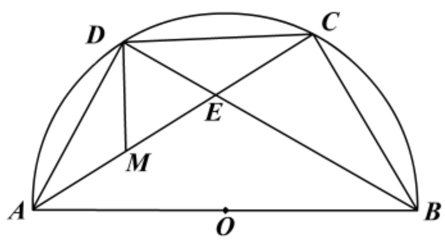


Figura 3

Hipótesis: semicírculo O

$AD = DC = OA$

M punto medio de $\overline{AE}$

Tesis: $\overline{BD}$ bisectriz de $A\hat{B}C$

$AE = 2EC$; $m(A\hat{E}B) = ?$

$m(D\hat{A}E) = ?$

5. En la figura 4:

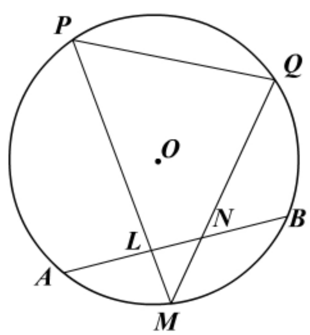


Figura 4

Hipótesis: círculo O

M punto medio de $\overset{\frown}{AB}$

$\overline{MP}$ y $\overline{MQ}$ cortan a $\overline{AB}$

en L y N

Tesis: $PLNQ$ es inscriptible

6. En la figura 5:

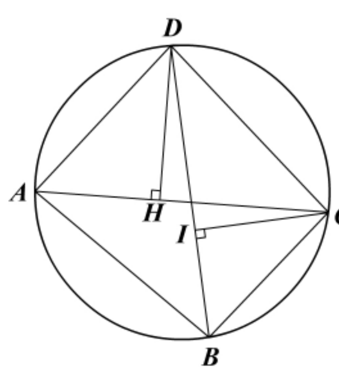


Figura 5

Hipótesis: círculo O

$ABCD$ cuadrilátero cíclico

$\overline{DH} \perp \overline{AC}$; $\overline{CI} \perp \overline{DB}$

Tesis: $A\hat{D}H \cong B\hat{C}I$

Autoevaluación

Autoevaluación

7. A, B, C y D son cuatro vértices consecutivos de un polígono regular de nueve lados. Halle la medida de los ángulos del cuadrilátero $ABCD$ y el ángulo entre las diagonales.

8. $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito en un círculo O, y $MNPR$ es un cuadrilátero circunscrito al mismo círculo y cuyos lados son tangentes al círculo en los vértices de $ABCD$.

a. Demuestre que $MN + PR = MR + NP$.

b. $m(\widehat{AB}) = 120º$, $m(\widehat{BC}) = 110º$ y $m(B\hat{Q}C) = 95º$, con Q punto de intersección de las diagonales AC y BD. Halle las medidas de los arcos restantes, además las medidas de los ángulos interiores de $ABCD$ y $MNPR$. Encuentre también la medida de los ángulos formados por las prolongaciones de los lados opuestos, en ambos cuadriláteros.

9. Dos circunferencias O_1 y O_2 se cortan en A y D. Se une A con el punto medio M de $\overline{O_1O_2}$ y se traza la perpendicular a $\overline{AM}$ en A, la cual corta a O_1 en B y a O_2 en C. Demuestre que $AB = AC$.

10. Dos circunferencias O_1 y O_2 son secantes en A y B. Por A se trazan las dos cuerdas diametrales AOC y AOD. Se traza también $\overline{CD}$. Demuestre que $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$.

11. Sean A y B dos puntos sobre la circunferencia. Se trazan dos cuerdas $\overline{AM}$ y $\overline{AN}$ cualesquiera, luego las cuerdas $\overline{BM'}$ paralela a $\overline{AM}$ y $\overline{BN'}$ paralela a $\overline{AN}$. Demuestre que $\overline{MN'}$ es paralela a $\overline{M'N}$.

12. Se hace pasar un círculo por los puntos medios de los lados de un triángulo rectángulo. Demuestre que el arco exterior a la hipotenusa es igual a la diferencia de los arcos exteriores a los catetos.

13. Dos círculos son tangentes en T. Se trazan las secantes BTC y $B'TC'$. Demuestre que $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son paralelas.

14. El triángulo ABC está inscrito en un círculo O. Las alturas AD y BF se cortan en H. Se prolonga $\overline{AD}$ hasta cortar a la circunferencia en M. Demuestre que $HD = DM$.

15. Dos circunferencias O_1 y O_2 son secantes en A y B. Por A y B se trazan respectivamente las secantes MAN y PBQ. Demuestre que $\overline{MP}$ es paralela a $\overline{NQ}$.

16. Dos circunferencias O_1 y O_2 se cortan en A y B. Por A se traza la secante MAN y por M y N se trazan las tangentes. Demuestre que el ángulo entre estas tangentes es congruente al ángulo entre las tangentes en B.

17. Dos circunferencias congruentes O_1 y O_2 son secantes pasando una por el centro de la otra y cortándose en M y N. Por M se traza la secante AMB, con A en O_1 y B en O_2. Demuestre que el ΔNAB es equilátero.

18. Dos circunferencias O_1 y O_2 son congruentes y se cortan en M y N. Por M se traza una secante que corta a O_1 en C y a O_2 en D. Demuestre que el ΔNCD es isósceles.

19. Se dan $A, B, C,$ y D en ese orden sobre una circunferencia. $m(\overset{\frown}{BC}) = 2p,\ m(\overset{\frown}{CD}) = 2n,\ m(\overset{\frown}{DA}) = 2q.$

a. Halle la medida del ángulo que cada lado hace con la diagonal.
b. Halle la medida del ángulo entre las diagonales.

c. Halle la medida del ángulo entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$.

20. $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico. $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CD}$ se cortan en E, y $\overrightarrow{CF}$ y $\overrightarrow{DA}$ se cortan en F. Demuestre que las bisectrices de E y F son perpendiculares.

21. Dos círculos O_1 y O_2 son tangentes exteriormente en B. Se traza una tangente exterior común MN y la tangente interior común a O_1 y O_2; estas tangentes se cortan en A. La cuerda $\overline{BM}$ corta a $\overline{O_1A}$ en C y $\overline{BN}$ corta a $\overline{O_2A}$ en D.

a. Demuestre que $AB = \dfrac{MN}{2}$.

b. Demuestre que los ángulos O_1 y O_2 y NBM son rectos.

c. Demuestre que $\overline{CD}$ es paralelo a $\overline{MN}$.

d. Si por A se levanta la perpendicular $\overline{AP}$ a $\overline{O_1O_2}$, demuestre que $AP = \dfrac{O_1O_2}{2}$.

22. Dos círculos son tangentes interiormente en T. Se traza a la circunferencia interior en P la tangente APB, con A y B en la circunferencia exterior. Se traza luego la recta TP que corta a la circunferencia exterior en Q. Demuestre que Q es el punto medio del arco $\overline{AB}$ y que $\overline{TP}$ es la bisectriz del ángulo ATB. (Sugerencia: trace la tangente común y prolongue BPA.)

23. Dos circunferencias O_1 y O_2 son tangentes exteriores en T, y ℓ es la tangente común. Si desde un punto P cualquiera de ℓ se trazan $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ tangentes a O_1 y O_2, respectivamente, demuestre que $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

24. Sean un círculo O y dos rectas no secantes ni tangentes al círculo. Determine el camino más corto de una recta a la otra tocando el círculo.

25. Sobre una circunferencia se trazan tres arcos: $m(\overset{\frown}{AB}) = 90^{\circ}$, $m(\overset{\frown}{BC}) = 60^{\circ}$ y $m(\overset{\frown}{CD}) = 90^{\circ}$:

a. Halle el ángulo que hacen $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

b. Al trazar las tangentes por A, B, C y D se forma el cuadrilátero $A'B'C'D'$. ¿Es $A'B'C'D'$ inscriptible? Halle los ángulos A', B', C' y D'.

26. ABC es una secante a un círculo O en B y C, y $\overline{AED}$ es otra secante al círculo en D y E. Si $\overline{BC} \cong \overline{ED}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{AD}$.

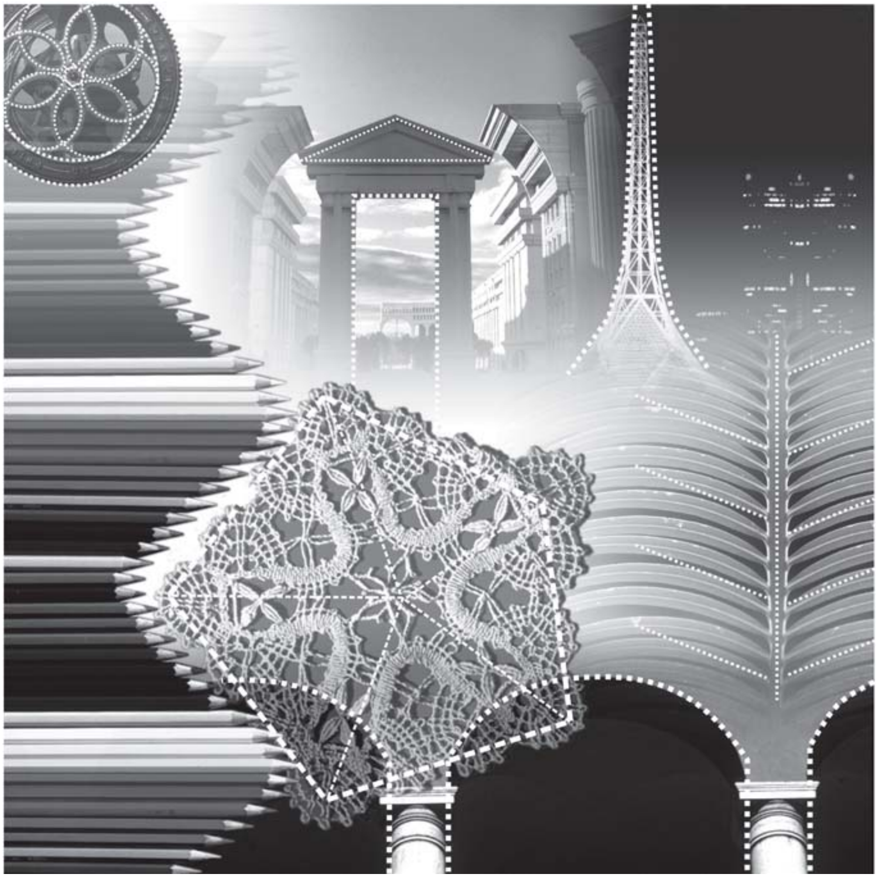
Autoevaluación

27. En un círculo O se prolonga una cuerda AB una longitud $BC = r$ con $A-B-C$. Se traza el segmento $CFOE$ que es un diámetro prolongado. Pruebe que $m(A\hat{O}E) = 3m(A\hat{C}E)$.

28. En un círculo O se traza una cuerda AB sobre la cual se toma un punto D que se une con un punto C cualquiera sobre la circunferencia. Se trazan las mediatrices de $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ que se cortan en M. Demuestre que $\overline{OM}$ es perpendicular a $\overline{AC}$.

29. Haciendo centro en A, punto cualquiera de la circunferencia de centro O, se describe una circunferencia tangente a la cuerda diametral AB de la circunferencia O. De B y C se trazan tangentes a la circunferencia A. Demuestre que tales tangentes son paralelas.

30. Se da un punto A sobre una circunferencia O y un punto interior a la circunferencia O. Se trazan la cuerda BC perpendicular a $\overline{AP}$ en su punto medio D, $\overline{BP}$ que corta a la circunferencia en B' y $\overline{CP}$ que corta a la circunferencia en C'. Demuestre que $B\hat{B}'C' \cong B\hat{B}'A$.



Capítulo 6

Relaciones métricas

Contenido breve

Presentación

Este capítulo trata el tema de la geometría que más dificultad les da a los estudiantes. Por eso se empieza haciendo un repaso aritmético de las proporciones con sus propiedades, que luego se aplican en el estudio de los segmentos proporcionales y especialmente en el teorema de la bisectriz. Posteriormente se analiza la semejanza de figuras geométricas y particularmente la de triángulos, que permite establecer relaciones entre los lados del triángulo y llegar así a la demostración del teorema de Pitágoras como relación básica en el triángulo rectángulo.

El teorema de Pitágoras hace posible que se puedan establecer relaciones métricas en un triángulo cualquiera, tales como el lado en función de los lados y el teorema de Stewart –que es básico para hallar la mediana y la bisectriz en función de los lados–. Se halla además la fórmula de Herón de Alejandría y se demuestran los teoremas de Euler, Menelao y Ceva, que establecen otras relaciones entre los lados de un triángulo. Finalmente se estudia la potencia de un punto respecto a una circunferencia y se analiza el segmento áureo, además de la relación que hay entre los lados de un polígono de *n* lados y un polígono de 2*n* lados, inscritos en un círculo.

Módulo 20

Segmentos proporcionales

Contenidos del módulo

20.1 Proporciones (revisión)
    20.1.1 Propiedades de las proporciones
20.2 Segmentos proporcionales

Objetivos del módulo

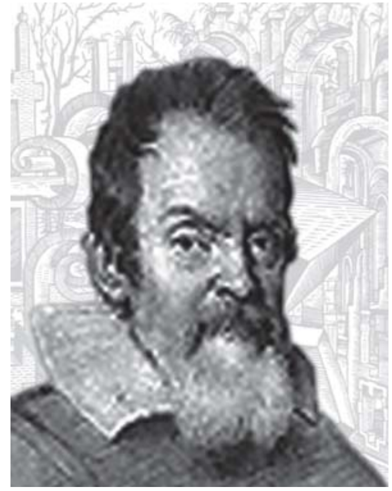
1. Definir una proporción.
2. Enumerar las propiedades de las proporciones.
3. Definir la división de un segmento en una razón dada.
4. Demostrar el teorema fundamental de segmentos proporcionales y su recíproco.
5. Demostrar el teorema de la bisectriz (interior o exterior) de un triángulo y su recíproco.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es una razón?
2. ¿Qué es una proporción?
3. ¿Cómo se llaman los elementos de una proporción?
4. ¿Qué propiedades tienen las proporciones?
5. ¿Qué son segmentos proporcionales?
6. ¿Cómo se establecen proporciones entre segmentos?
7. ¿Cuál es el teorema de la bisectriz?
8. ¿Cómo se calculan los segmentos determinados por las bisectrices?

Introducción

Se inicia este módulo con una revisión sobre las proporciones de cantidades reales y se pasa luego a estudiar los segmentos proporcionales. Se analizan después los segmentos determinados, sobre los lados de un triángulo, por una secante paralela al tercer lado del triángulo. Se termina con el análisis de los segmentos determinados por la bisectriz (interior o exterior) de un triángulo, sobre el lado opuesto de su prolongación.



Giovanni Ceva

(1648-1734). Matemático italiano nacido en Milán y muerto en Mantua.

Vea el módulo 20 del programa de televisiÛn *GeometrÌa Euclidiana*

20.1 Proporciones (revisión)

Definición 20.1.1

Una *razón* es la relación que establecemos entre dos cantidades de la misma clase en las mismas unidades.

La relación entre las dos cantidades es el cociente entre las medidas de los elementos indicados. Podemos, por ejemplo, establecer la razón entre las longitudes de dos segmentos cualesquiera, o entre las medidas de dos ángulos si estas medidas están en las mismas unidades.

La razón entre dos cantidades *a* y *b* la denotamos $\frac{a}{b}$, a/b, $a \div b$ o $a:b$ y la leemos "*a* es a *b*", con $b \neq 0$. Como una razón es una fracción, entonces todas las propiedades o leyes que rigen a las fracciones se pueden aplicar a las razones.

Una razón es una cantidad abstracta que nos indica el número de veces que una cantidad contiene a otra y se expresa lo más simplificado posible. En la razón $a:b$, *a* y *b* se llaman términos de la razón; *a* es el antecedente y *b* es el consecuente.

Si la razón de dos cantidades cualesquiera puede ser expresada exactamente por la razón de dos enteros, dichas cantidades se llaman *conmensurables*; si no se da lo anterior se les llama *inconmensurables* (por ejemplo en la razón $\sqrt{3}:2$).

Definición 20.1.2

Una *proporción* es la igualdad de dos razones.

Si las razones $a:b$ y $c:d$ son iguales, escribimos $a:b = c:d$ o también $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ y leemos "*a* es a *b* como *c* es a *d*".

En la proporción $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$, *a* es el primer término, *b* es el segundo término, *c* es el tercero y *d* es el cuarto; *a* y *c* se llaman antecedentes, *b* y *d* son los consecuentes; *a* y *d* son los extremos en tanto que *b* y *c* son los medios de la proporción.

Si *a*, *b*, *c*, *d* son cuatro cantidades proporcionales, decimos que uno de ellos es cuarta proporcional de los otros.

Definición 20.1.3

Varias cantidades están en proporción continua cuando la primera cantidad es a la segunda, como la segunda es a la tercera, como la tercera es a la cuarta, y así sucesivamente.

Es decir, si $a, b, c, d, \cdots$ están en proporción continua, escribimos: $\frac{a}{b}:\frac{b}{c}:\frac{c}{d}:\cdots$

Si *a*, *b*, *c* forman una proporción continua, tenemos $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ y decimos que *b* es media proporcional o media geométrica entre *a* y *c*, mientras que *a* y *c* se llaman tercera proporcional.

Las proporciones más sencillas son las que se dan entre cuatro cantidades y son las de mayor uso en geometría. Por ello es de gran utilidad enumerar algunas de las propiedades más importantes de las proporciones.

20.1.1 Propiedades de las proporciones

1. En toda proporción el producto de los términos extremos es igual al producto de los términos medios.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

2. En toda proporción, si los antecedentes son iguales, entonces los consecuentes también lo son.

$$\frac{a}{b}:\frac{a}{d} \Rightarrow b = d$$

3. Si la proporción es continua, entonces:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{d} \Rightarrow b^2 = a \cdot d$$

b es media proporcional o media geométrica entre a y d.

4. En toda proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se puede:

- Intercambiar los medios: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$
- Intercambiar los extremos: $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$
- Invertir la proporción: $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

5. En toda proporción la suma o la diferencia de los dos primeros términos es al segundo, como la suma o la diferencia de los dos últimos es al cuarto:

$$\text{Si } \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ entonces } \begin{cases} \dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}, \quad \dfrac{a+b}{a}=\dfrac{c+d}{c} \\ \\ \dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}, \quad \dfrac{a-b}{a}=\dfrac{c-d}{c} \end{cases}$$

6. En toda proporción la suma de los primeros términos es a la suma de los dos últimos, como la diferencia de los dos primeros es a la diferencia de los dos últimos:

$$\text{Si } \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ entonces } \begin{cases} \dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{a-b}{c-d} \\ \\ \dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d} \end{cases}$$

Giovanni Ceva

Ceva fue, además de matemático, ingeniero dedicado a la construcción de obras hidráulicas. Está considerado como el primer matemático que abordó los temas económicos desde esta disciplina, lo que se patentiza en su obra *De re numeraria, quod fieri potuit geometrice tractata ad illustrissimos et excellentissimos dominos Praesidem Quaestoremque*. El *teorema de Ceva* establece condiciones necesarias y suficientes para la concurrencia de tres rectas.

7. Si se tiene la igualdad de una serie finita de razones entonces la suma de los numeradores (antecedentes) es a la suma de los denominadores (consecuentes), como un numerador cualquiera es a su denominador:

$$\text{Si } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots, \text{ entonces } \frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$$

20.2 Segmentos proporcionales

Definición 20.2.1

Dos segmentos son proporcionales a otros dos cuando la razón de las medidas (longitudes) de los dos primeros es igual a la razón de las medidas de los otros dos.

Las medidas o longitudes de los segmentos deben estar en las mismas unidades. Si las medidas de los segmentos las representamos por a, b, c, d, entonces tenemos:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Un segmento *AB* es media proporcional entre los segmentos *CD* y *EF* si se cumple que

$$\frac{CD}{AB}=\frac{AB}{EF}, \text{ o bien } \frac{AB}{CD}=\frac{EF}{AB},$$

y por la propiedad 1 de las proporciones:

$$AB^2=CD\cdot EF \Rightarrow AB=\sqrt{CD\cdot EF},$$

es decir, *AB* es medio geométrico entre *CD* y *EF*.

El siguiente teorema nos muestra la división de un segmento en una razón dada.

Teorema 20.2.1

Dado un segmento *AB*, sólo hay dos puntos *C* y *D* tales que la razón de distancias de ellos a los extremos *A* y *B* es igual a un número dado *k*.

1. El punto *C* está entre *A* y *B*, $A-C-B$, tal que

$$\frac{AC}{BC}=k \qquad \text{(figura 20.1)} \qquad (1)$$

Demostración
Supongamos que existe otro punto *C'* tal que

$$\frac{AC'}{BC'}=k \qquad (2)$$

Tendríamos entonces $\frac{AC}{BC}=\frac{AC'}{BC'}$, y por propiedad de proporciones:

$$\frac{AC+BC}{BC}=\frac{AC'+BC'}{BC'}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{BC'}\Rightarrow BC=BC'$$

luego $C=C'$ (coinciden).

2. El punto D está en la prolongación de $\overline{AB}$, $A-B-D$, tal que:

$$\frac{AD}{BD}=k \qquad \text{(figura 20.2)} \qquad (3)$$

Supongamos que existe otro punto D' en la prolongación de $\overline{AB}$ tal que:

$$\frac{AD'}{BD'}=k \qquad (4)$$

De (3) y (4) obtenemos $\frac{AD}{BD}=\frac{AD'}{BD'}$, y por propiedad de proporciones:

$$\frac{AD-BD}{BD}=\frac{AD'-BD'}{BD'}\Rightarrow\frac{AB}{BD}=\frac{AB}{BD'}\Rightarrow BD=BD'$$

luego $D=D'$ (coinciden).

Figura 20.1

Figura 20.2

Si un punto P divide a un segmento AB en la razón (o relación) $m:n$ (figura 20.3), podemos escribir:

1. $\frac{PA}{PB}=\frac{m}{n}$
2. $\frac{PA}{AB}=\frac{m}{m+n}$
3. $\frac{PB}{AB}=\frac{n}{m+n}$

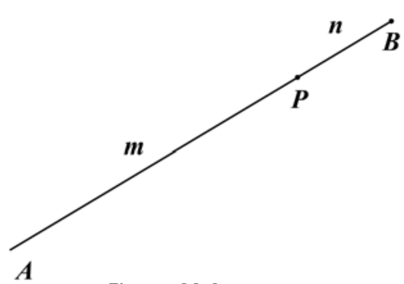


Figura 20.3

Nota: no se deben confundir *m,n* con las medidas de los segmentos.

Ejemplo 20.2.1

Si el punto P divide al segmento MN en la relación 3:4, entonces podemos escribir (figura 20.4):

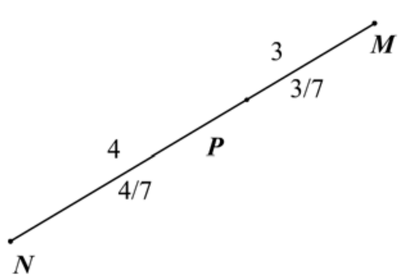


Figura 20.4

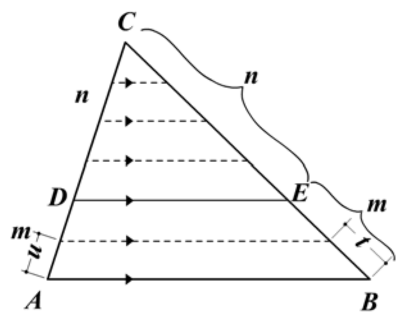
$$\frac{PM}{PN}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{PM}{MN}=\frac{3}{7}$$

$$\frac{PN}{MN}=\frac{4}{7}$$

Teorema 20.2.2: Teorema fundamental de segmentos proporcionales (TFSP)

Toda recta paralela a un lado de un triángulo determina sobre los otros dos lados segmentos proporcionales (figura 20.5).



Hipótesis: ΔABC cualquiera

$C-D-A;\ C-E-B$

$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

Tesis: $\dfrac{CD}{DA}=\dfrac{CE}{EB}$

Figura 20.5

Demostración

Supongamos que hay una unidad de medida *u* que está contenida *m* veces en $\overline{AD}$ y *n* veces en $\overline{DC}$. Obtenemos así que $CD = nu$, $DA = mu$ y

$$\frac{CD}{DA}=\frac{nu}{mu}\Rightarrow\frac{CD}{DA}=\frac{n}{m} \qquad (1)$$

Por todos los puntos divisores de $\overline{CA}$ trazamos paralelas $\overline{AB}$ (quinto postulado de Euclides), determinándose en $\overline{CB}$ segmentos congruentes (teorema fundamental del paralelismo), cada uno de medida *t*. Entonces $CE = nt$ y $EB = mt$, y por tanto

$$\frac{CE}{EB}=\frac{nt}{mt}\Rightarrow\frac{CE}{EB}=\frac{n}{m} \qquad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos: $\dfrac{CD}{DA}=\dfrac{CE}{EB}$

Nota:

a. Si en $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ las unidades de medida *u* y *t* no están contenidas un número exacto de veces, el teorema se demuestra usando conceptos de límites.

b. Si aplicamos las propiedades de las proporciones podemos escribir:

Corolario 20.2.1

$$\frac{CD}{DA}=\frac{CE}{EB}\Rightarrow\frac{CD+DA}{DA}=\frac{CE+EB}{EB}\Rightarrow\frac{CA}{DA}=\frac{CB}{EB}$$

Corolario 20.2.2

$$\frac{CD}{DA}=\frac{CE}{EB}\Rightarrow\frac{DA}{CD}=\frac{EB}{CE}\Rightarrow\frac{DA+CD}{CD}=\frac{EB+CE}{CE}\Rightarrow\frac{CA}{CD}=\frac{CB}{CE}$$

Corolario 20.2.3

Si en la figura 20.5 trazamos por D una paralela a $\overline{CB}$, podemos (usando los corolarios 20.2.1 y 20.2.2) demostrar que $\dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CB}{CE} = \dfrac{AB}{DE}$ (hacerlo).

c. La recta paralela $\overline{DE}$ puede cortar las prolongaciones de los otros dos lados y el teorema continúa siendo verdadero (figuras 20.6 y 20.7).

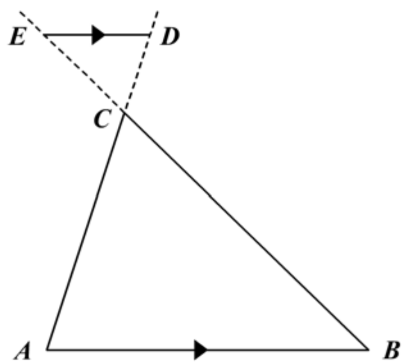


Figura 20.6

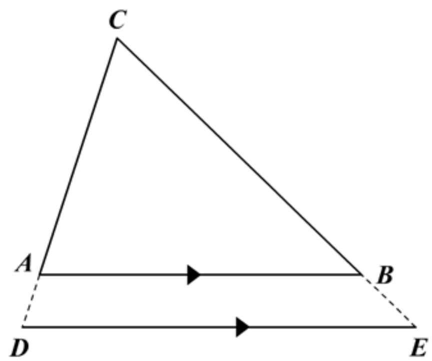


Figura 20.7

Teorema 20.2.3: RecÌproco del TFSP

Si una recta al cortar a dos lados de un triángulo determina segmentos proporcionales, es paralela al tercer lado (figura 20.8).

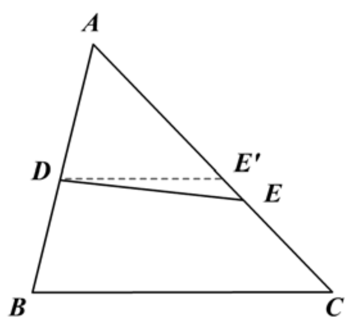


Figura 20.8

Hipótesis: ΔABC cualquiera

$A-D-B,\ A-E-C$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \qquad (1)$$

Tesis: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

Demostración

Supongamos que $\overline{DE}$ no es paralela a $\overline{BC}$ y sea $\overline{DE'} \parallel \overline{BC}$. Entonces, por el TFSP, obtenemos que $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE'}{E'C}$ (2)

De (1) y (2): $\dfrac{AE'}{E'C} = \dfrac{AE}{EC} \Rightarrow \dfrac{AE' + E'C}{E'C} = \dfrac{AE + EC}{EC}$

$$\Rightarrow \frac{AC}{E'C} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow E'C = EC$$

Por tanto $E' = E$ (coinciden) $\therefore$ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Teorema 20.2.4

Si tres o más rectas paralelas cortan a dos transversales cualesquiera, los segmentos que determinan en una de ellas son proporcionales a sus correspondientes de la otra transversal (figura 20.9).

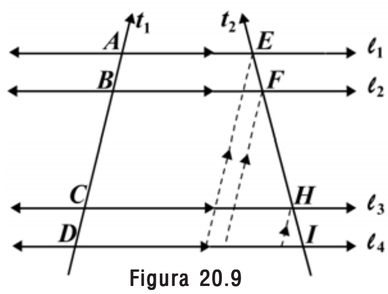


Figura 20.9

Hipótesis: $\ell_1 \parallel \ell_2 \parallel \ell_3 \parallel \ell_4$

t_1, t_2 transversales en $A, B, \cdots, I$

Tesis: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{EF}{FH}$ o $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{EH}{HI}, \cdots$

La demostración se deja como ejercicio.

Sugerencia: trace por E, F y H paralelas a t_1.

Teorema 20.2.5: De la bisectriz

En todo triángulo la bisectriz de un ángulo interior o exterior divide al lado opuesto a su prolongación en segmentos proporcionales a los lados adyacentes.

Demostración

- La bisectriz interior (figura 20.10)

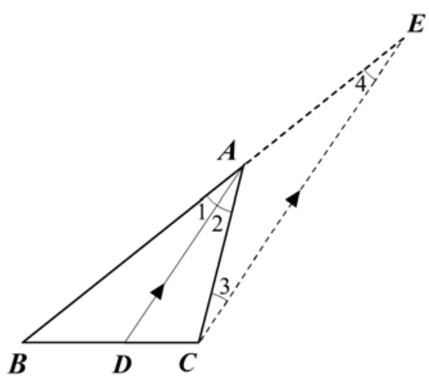


Figura 20.10

Hipótesis: ΔABC cualquiera

$\overline{AD}$ bisectriz interior de $\hat{A}$

$B - D - C$

Tesis: $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{CD}{AC}$ o $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{CA}$

Demostración

Trazamos por C una paralela a la bisectriz $\overline{AD}$, la cual corta a la prolongación de $\overline{AB}$ en E.

Obtenemos: $\hat{1} \cong \hat{2}$ ($\overline{AD}$ bisectriz)

$\hat{2} \cong \hat{3}$ (son ángulos alternos internos entre $\overline{AD} \parallel \overline{CE}$)

$\hat{1} \cong \hat{4}$ (son ángulos colaterales entre $\overline{AD} \parallel \overline{CE}$)

Por transitividad: $\hat{1} \cong \hat{2} \cong \hat{3} \cong \hat{4}.$ Por tanto $AE = AC$ porque $\hat{4} \cong \hat{3}.$

Por el TFSP ($\overline{AD} \parallel \overline{CE}$) obtenemos:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} \quad \text{o} \quad \frac{BD}{BA} = \frac{DC}{AC}$$

- La bisectriz exterior (figura 20.11)

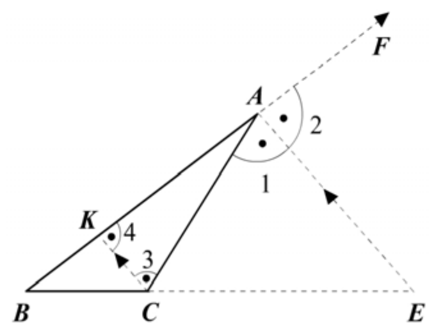


Figura 20.11

Hipótesis: $\triangle ABC$ isósceles

$\overline{AE}$ bisectriz exterior

$B - C - E$

Tesis: $\dfrac{BE}{BA} = \dfrac{CE}{CA}$ o $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BE}{CE}$

Demostración

Por el punto C trazamos una paralela a la bisectriz $\overline{AE}$, la cual corta a $\overline{AB}$ en el punto K.

Obtenemos: $\hat{1} \cong \hat{2}$ ($\overline{AE}$ bisectriz)

$\hat{1} \cong \hat{3}$ (son ángulos alternos internos entre $\overline{AE} \parallel \overline{CK}$)

$\hat{2} \cong \hat{4}$ (son ángulos colaterales entre $\overline{AE} \parallel \overline{CK}$)

Por transitividad: $\hat{1} \cong \hat{2} \cong \hat{3} \cong \hat{4}.$ Por tanto $AK = AC$ porque $\hat{4} \cong \hat{3}$

Por el TFSP ($\overline{CK} \parallel \overline{AE}$) se tiene que:

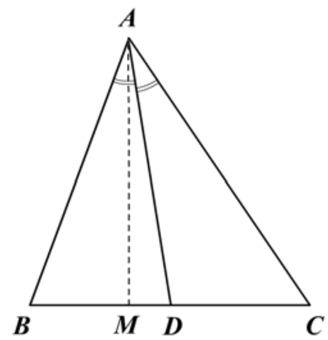
$$\frac{BE}{CE} = \frac{BA}{KA} \Rightarrow \frac{BE}{CE} = \frac{BA}{AC} \quad \text{o} \quad \frac{BE}{BA} = \frac{CE}{AC}$$

Nota: si el $\triangle ABC$ es isósceles, la bisectriz exterior del ángulo del vértice es paralela a la base y el teorema no se cumple.

Teorema 20.2.6: Recíproco

En todo triángulo ABC los puntos que dividen a $\overline{BC}$ o a su prolongación en segmentos cuyas longitudes son proporcionales a los lados adyacentes son los pies de las bisectrices trazadas desde el vértice A.

- La bisectriz interior de $\hat{A}$ (figura 20.12)



Hipótesis: ΔABC cualquiera D está entre B y C

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{CA} \qquad (1)$$

Tesis: $\overline{AD}$ bisectriz de $\hat{A}$

Figura 20.12

Demostración

Supongamos que $\overline{AD}$ no es bisectriz y que $\overline{AM}$ es la bisectriz de $\hat{A}$ con $B - M - C$. Entonces, por el teorema de la bisectriz:

$$\frac{BM}{MC} = \frac{BA}{CA} \qquad (2)$$

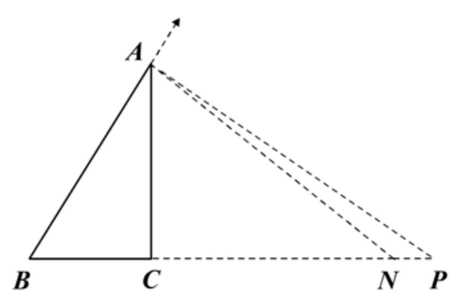
De (1) y (2) tenemos que $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BM}{MC}$

Por las propiedades de proporciones:

$$\frac{BD + DC}{DC} = \frac{BM + MC}{MC} \Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{MC} \Rightarrow DC = MC$$

Por tanto D y M coinciden y concluimos que $\overline{AD}$ es bisectriz de $\hat{A}$.

- La bisectriz exterior (figura 20.13)



Hipótesis: ΔABC con $P \in \overrightarrow{BC}$ tal que

$$\frac{BP}{CP} = \frac{AB}{AC} \qquad (1)$$

Tesis: $\overline{AP}$ bisectriz de $\hat{A}$

Figura 20.13

Demostración

Supongamos que $\overline{AP}$ no es bisectriz y que $\overline{AN}$ es la bisectriz de $\hat{A}$ con $B - C - N$. Por el teorema de la bisectriz:

$$\frac{BN}{CN} = \frac{BA}{AC} \qquad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos $\dfrac{BP}{CP} = \dfrac{BN}{CN}$

Por las propiedades de proporciones:

$$\frac{BP-CP}{CP}=\frac{BN-CN}{CN}\Rightarrow\frac{BC}{CP}=\frac{BC}{CN}\Rightarrow CP=CN$$

Por tanto P y N coinciden y concluimos que $\overline{AP}$ es bisectriz de $\hat{A}$.

Ejemplo 20.2.2

Dados los tres lados *a*, *b*, *c* de un ΔABC, calcular, en función de los lados, los segmentos determinados sobre un lado por los pies de las bisectrices (figura 20.14).

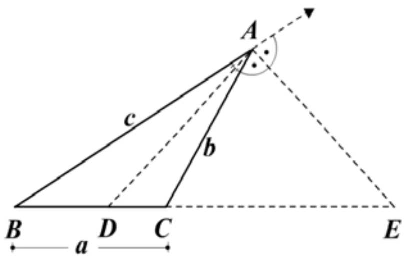


Figura 20.14

Hipótesis: ΔABC con $\overline{AE}$, $\overline{AD}$ bisectrices, $AB=c$

$BC=a$, $AC=b$

Tesis: hallar BD, DC, BE, CE

1. La bisectriz interior $\overline{AD}$:

- $$\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{CA}\Rightarrow\frac{BD+DC}{DC}=\frac{BA+AC}{CA}\Rightarrow\frac{BC}{DC}=\frac{BA+AC}{AC}$$

  $$\Rightarrow\frac{a}{DC}=\frac{c+b}{b}\Rightarrow DC=\frac{ab}{b+c}$$

- $$\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{CA}\Rightarrow\frac{DC}{BD}=\frac{CA}{BA}\Rightarrow\frac{DC+BD}{BD}=\frac{CA+AB}{AB}$$

  $$\Rightarrow\frac{BC}{BD}=\frac{CA+AB}{AB}\Rightarrow\frac{a}{BD}=\frac{b+c}{c}\Rightarrow BD=\frac{ac}{b+c}$$

2. La bisectriz exterior $\overline{AE}$:

- $$\frac{BE}{CE}=\frac{BA}{CA}\Rightarrow\frac{BE-CE}{CE}=\frac{BA-CA}{CA}\Rightarrow\frac{BC}{CE}=\frac{BA-CA}{CA}$$

  $$\Rightarrow\frac{a}{CE}=\frac{c-b}{b}\Rightarrow CE=\frac{ab}{c-b}$$

- $$\frac{CE}{BE}=\frac{CA}{BA}\Rightarrow\frac{CE-BE}{BE}=\frac{CA-BA}{BA}\Rightarrow\frac{-BC}{BE}=\frac{CA-BA}{BA}$$

  $$\Rightarrow\frac{-a}{BE}=\frac{b-c}{c}\Rightarrow\frac{a}{BE}=\frac{c-b}{c}\Rightarrow BE=\frac{ac}{c-b}$$

Ejercicios

Módulo 20

Complete cada una de las siguientes afirmaciones (1 a 7):

1. $2:3 = \_\_ :12$

2. $\_\_ :3 = 6x: \_\_ = 24:18$

3. $5:4 = 10: \_\_ = \_\_ 28 = 5\sqrt{2}: \_\_$

4. Si $3x = 2y$, entonces $x:y = \_\_ : \_\_$

5. Si $2x:3y = 7z:5t$, entonces $x:y = \_\_ : \_\_$

6. Si $a:b = 3:2$, entonces $a+b:b = \_\_ : \_\_$

7. Si $x+y:y = \dfrac{4}{7}$, entonces $x:y = \_\_ : \_\_$

En los ejercicios 8 a 10 halle el valor de $x,\ y$ según sea el caso:

8. $x+3:4 = 4:(x-3)$

9. $(3x+8):(x-2) = (3x+5):(x-1)$

10. $x:4 = y:5 = 3:2$

11. Halle la cuarta proporcional entre 5, 3 y 2.

12. Halle la tercera proporcional entre 9 y 16.

13. Halle la media proporcional entre 6 y 24.

14. Demuestre la propiedad 5 de las proporciones.

15. Demuestre la propiedad 6 de las proporciones.

16. Demuestre la propiedad 7 de las proporciones.

17. Si a, b, c forman una proporción continua, demuestre que la razón de la primera a la tercera es igual a la razón duplicada de la primera a la segunda.

18. La longitud de un segmento es 60 cm y es dividido por un punto en dos segmentos cuya razón es 3 a 5. Halle la longitud de cada segmento.

19. El perímetro de un triángulo es 48 cm y los lados están en la razón 3:4:5. Halle la longitud de cada lado.

20. En la figura 1 $\overline{PM}$ es la bisectriz de $\hat{P}$. Complete las proporciones indicadas.

a. $\dfrac{RM}{RP} = \underline{\quad\quad}$ b. $\dfrac{QP}{QM} = \underline{\quad\quad}$

c. $\dfrac{RM + MQ}{MQ} = \underline{\quad\quad}$ d. $\dfrac{QP}{PR} = \underline{\quad\quad}$

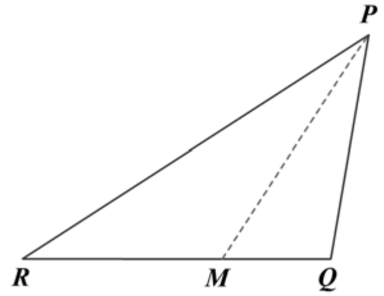


Figura 1

21. En la figura 2 $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$. Halle x.

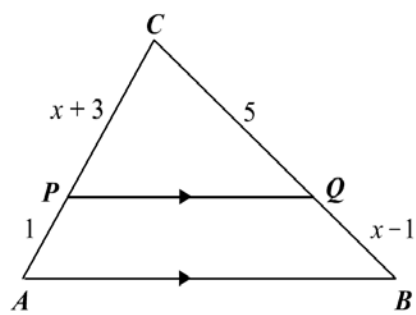


Figura 2

22. En la figura 3 $\overline{AD}$ es bisectriz de $\hat{A}$, $AB = 6$, $AC = 5$ y $BC = 8$. Halle BD y DC.

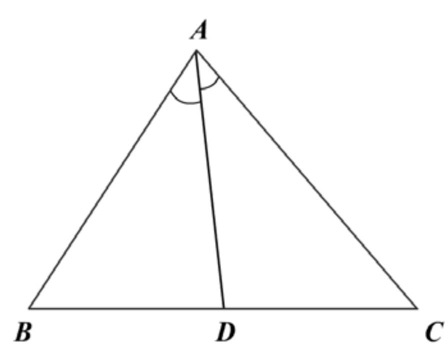


Figura 3

23. En la figura 4, ¿para cuál de los siguientes enunciados $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$?

a. $AB = 14$; $AM = 6$; $AC = 7$; $AN = 3$.
b. $AB = 12$; $MB = 3$; $AC = 8$; $AN = 6$.
c. $AM = 6$; $MB = 5$; $AN = 9$; $AN = 6$.
d. $AC = 21$; $NC = 9$; $AB = 14$; $AM = 5$.
e. $AB = 20$; $AM = 16$; $AC = 30$; $AN = 23$.

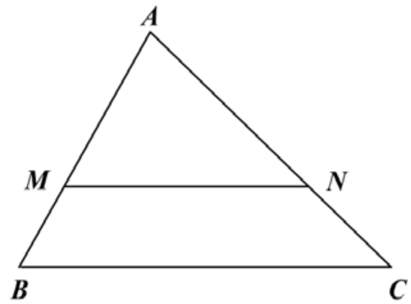


Figura 4

24. En la figura 5 $A\hat{B}C \cong D\hat{E}C$.

a. Si $DC = BE$, $BC = 6$, $AD = 8$, halle EC.
b. Si $EC = 7$, $DC = 2BE$, $AD = 14$, halle AC.
c. Si $AC = 24$, $DC = CB$, $EC = 4$, halle BC.
d. Si $CE = 2EB$, $CB = 20$, halle DE.

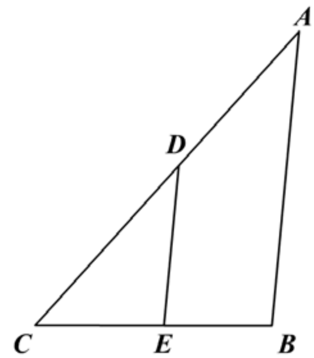


Figura 5

25. En las siguientes figuras (6 a 13) halle x.

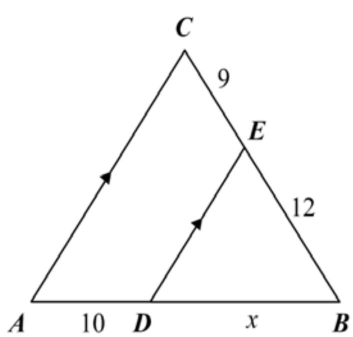


Figura 6

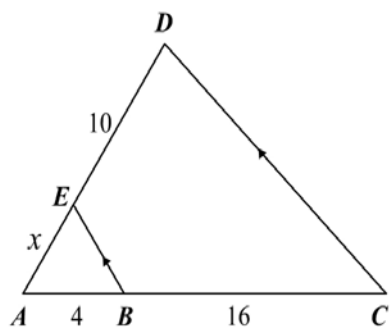


Figura 7

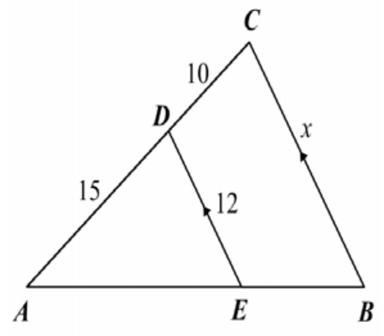


Figura 8

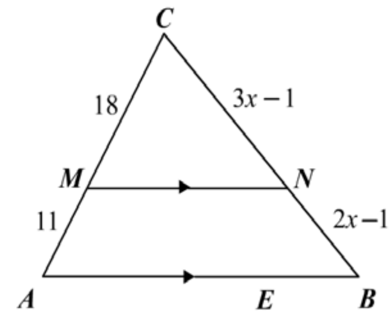


Figura 9

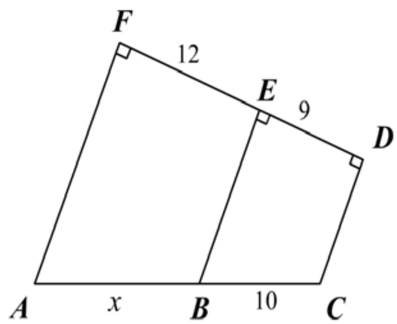


Figura 10

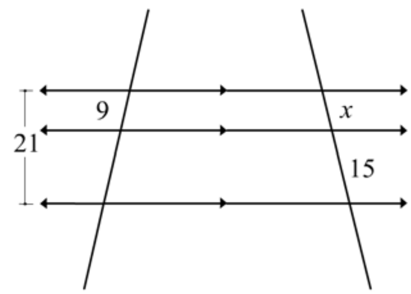


Figura 11

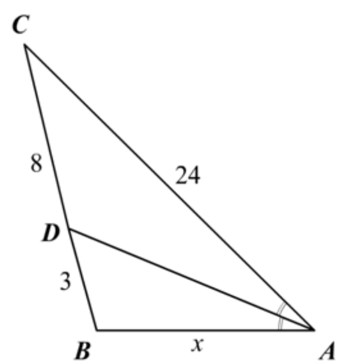


Figura 12

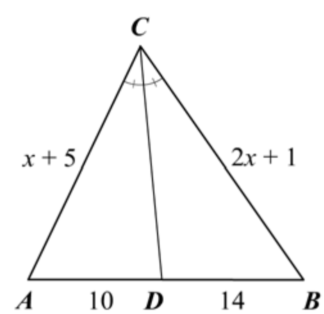


Figura 13

26. $ABCD$ es un paralelogramo en el cual se tiene $D-M-C$ y $\overline{DH}$ bisectriz de $\hat{D}$ con $A-H-M$. Si $AB=14$, $BC=16$, $AH=13$ y $MC=8$, halle HM.

27. Si en un triángulo ABC se tiene $B-D-A$, $B-E-C$, $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$, $BD=a$, $BE=2AD$ y $EC=2a$, halle los lados AB y BC.

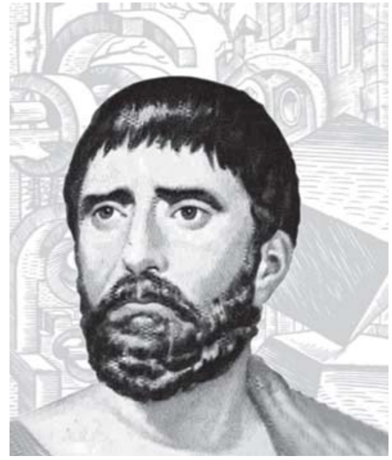
28. Si en un triángulo ABC se tiene que $\overline{AD}$, $\overline{CE}$, $\overline{BF}$ son bisectrices de los ángulos A, C y B, y si $AC = 30$, $BC = 8$ y $AB = 36$, halle AF, CD y BE.

29. En un triángulo ABC se traza, por el punto medio M de $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ paralelo a $\overline{BC}$ con $A-N-C$. Se toma un punto D tal que $M-D-N$ y $DM : DN = AC : AB$. Luego se une D al punto medio P de $\overline{BC}$. Demuestre que $\overline{PD}$ es la bisectriz del ángulo MPN.

30. Sea el círculo de centro O y $\overline{AB}$ una cuerda diametral prolongada hasta P con $A-B-P$. Desde P se trazan $\overline{PM}$ y $\overline{PN}$ tangentes a la circunferencia de centro O; la cuerda $\overline{MN}$ corta a $\overline{AB}$ en Q. Demuestre que $\frac{QA}{QB} = \frac{MA}{MB}$.

Módulo 21

Semejanza de triángulos



Tales de Mileto

(c. 624-c. 548 a.C.). Filósofo y matemáti- co griego nacido en Mileto, Asia Menor.

Contenidos del módulo

21.1 Semejanza de triángulos

Objetivos del módulo

1. Definir polígonos semejantes.
2. Definir triángulos semejantes.
3. Presentar el teorema de Tales de Mileto.
4. Analizar los criterios de semejanza de triángulos.

Preguntas básicas

1. ¿Cuándo dos polígonos son semejantes?
2. ¿Qué propiedades cumple la semejanza de polígonos?
3. ¿Cuándo dos triángulos son semejantes?
4. ¿Qué es el teorema de Tales?
5. ¿Cuáles son los criterios que se deben tener presentes para que dos triángulos sean semejantes?

Introducción

En esta sección se presenta una definición de polígonos semejantes y se particulariza para triángulos. Se demuestra el teorema de Tales de Mileto y se aplica en la demostración de diferentes criterios que determinan si dos triángulos son o no semejantes.

Vea el módulo 21 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

21.1 Semejanza de triángulos

En la vida diaria nos encontramos con ejemplos muy comunes que nos están mostrando elementos parecidos o semejantes: la fotografía, los planos a escala, las fotocopias ampliadas o reducidas, etc.

En la geometría podemos afirmar que dos figuras son semejantes si tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño.

Definición 21.1.1

Dos polígonos son semejantes si y sólo si tienen los ángulos respectivamente congruentes y los lados correspondientes proporcionales (figura 21.1).

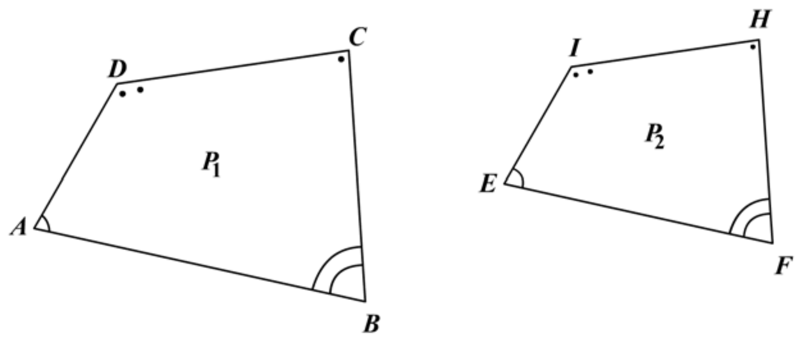


Figura 21.1

Si $\hat{A} \cong \hat{E}$, $\hat{B} \cong \hat{F}$, $\hat{C} \cong \hat{H}$, $\hat{D} \cong \hat{I}$ y $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{BC}{FH} = \dfrac{CD}{HI} = \dfrac{DA}{IE}$,

entonces decimos que el polígono P_1 es semejante con el polígono P_2 y escribimos:

$$P_1 \sim P_2.$$

Los lados correspondientes en dos polígonos semejantes son los lados adyacentes a los ángulos congruentes.

Se llama razón de semejanza el número que expresa la razón de los lados correspondientes.

Para poder establecer una semejanza entre dos polígonos se tienen que dar simultáneamente las dos condiciones; si sólo se da una de las condiciones no necesariamente los polígonos son semejantes:

a. Si consideramos un rectángulo y un cuadrado, sus ángulos son congruentes pero sus lados no son proporcionales.

b. Si consideramos un rombo y un cuadrado, sus lados son proporcionales pero sus ángulos no son congruentes.

Si dos figuras son congruentes, la razón de semejanza es 1 y decimos que las figuras son semejantes.

La semejanza de figuras geométricas es una relación de equivalencia, es decir, cumple las propiedades:

Reflexiva: $F_1 \sim F_1$

Simétrica: $F_1 \sim F_2 \rightarrow F_2 \sim F_1$

Transitiva: $F_1 \sim F_2 \wedge F_2 \sim F_3 \rightarrow F_1 \sim F_3$

Nota: si $F_1 \cong F_2 \wedge F_2 \sim F_3$, entonces $F_1 \sim F_3$.

Definición 21.1.2

Si $ABC \leftrightarrow DEF$ es una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos tal que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes proporcionales, entonces la correspondencia es una semejanza. Decimos que los triángulos son semejantes y escribimos $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. En la figura 21.2 sea $ABC \leftrightarrow DEF$ tal que:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} \cong \hat{D},\ \ \hat{B} \cong \hat{E},\ \ \hat{C} \cong \hat{F} \\ \\ \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD} \quad \text{o} \\ \\ \dfrac{c}{f} = \dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

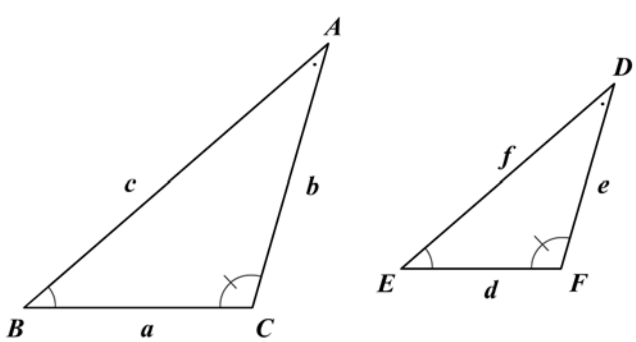


Figura 21.2

En los triángulos semejantes generalmente los lados correspondientes son los opuestos a los ángulos congruentes, y recíprocamente.

La semejanza de triángulos cumple las propiedades de la semejanza de polígonos.

Las condiciones de semejanza de triángulos se pueden reducir como lo indican los siguientes teoremas.

Tales de Mileto

En su juventud viajó a Egipto, donde aprendió geometría de los sacerdotes de Menfis, y astronomía, que posteriormente enseñaría con el nombre de *astrosofía*. Según Tales, el principio original de todas las cosas es el agua, de la que todo procede y a la que todo vuelve otra vez. En geometría, y con base en los conocimientos adquiridos en Egipto, elaboró un conjunto de teoremas generales y de razonamientos deductivos a partir de éstos. Todo ello fue recopilado posteriormente por Euclides en su obra *Elementos*, pero se debe a Tales el mérito de haber introducido en Grecia el interés por los estudios geométricos.

Teorema 21.1.1: Teorema de Tales

Toda recta que corta a dos lados (o a sus prolongaciones) de un triángulo, y es paralela al tercer lado, determina un segundo triángulo que es semejante al primero (figura 21.3).

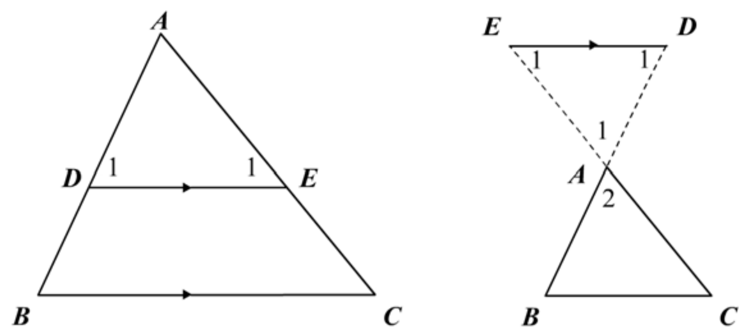


Figura 21.3

Hipótesis: ΔABC, donde $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

Tesis: $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

Demostración

$\hat{A}$ común o bien $\hat{A}_1 \cong \hat{A}_2$ por opuestos por el vértice; además, como $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces $\hat{D}_1 \cong \hat{B}$ y $\hat{E}_1 \cong \hat{C}$.

Por el corolario 20.2.3 del teorema fundamental de segmentos proporcionales obtenemos:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{BC}{DE}$$

y por tanto $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

Teorema 21.1.2: A-A

Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente congruentes, son semejantes (figura 21.4).

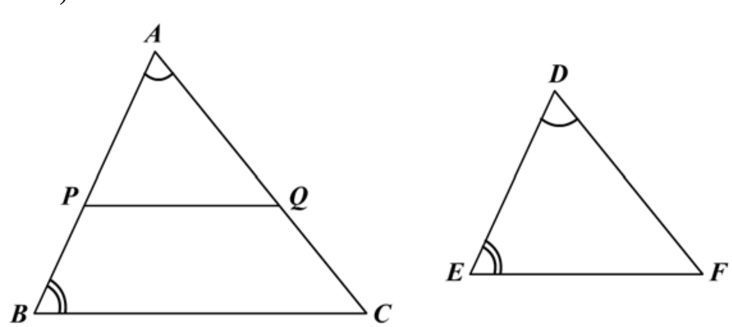


Figura 21.4

Hipótesis: $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$

$\hat{A} \cong \hat{D}$

$\hat{B} \cong \hat{E}$

Tesis: $\triangle DEF \sim \triangle ABC$

Demostración

Sean P un punto sobre $\overline{AB}$ y Q sobre $\overline{AC}$ tales que $\overline{AP} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AQ} \cong \overline{DF}$. Entonces $\triangle APQ \cong \triangle DEF$ por L-A-L, lo cual implica $A\hat{P}Q \cong \hat{E}$, y como $\hat{E} \cong \hat{B}$ (hipótesis), entonces $A\hat{P}Q \cong \hat{B}$ y por consiguiente $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$. Por el teorema de Tales, $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ por ser $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$.

Si $\triangle APQ \cong \triangle DEF$ y $\triangle APQ \sim \triangle ABC$, entonces concluimos que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Corolario 21.1.1

Dos triángulos que tienen sus ángulos congruentes son semejantes (A-A-A).

Corolario 21.1.2

Dos triángulos rectángulos que tienen un ángulo agudo congruente son semejantes.

Corolario 21.1.3

Dos triángulos isósceles que tienen un ángulo correspondiente congruente son semejantes.

Corolario 21.1.4

Los triángulos equiláteros son semejantes.

Teorema 21.1.3: L-A-L

Si dos triángulos tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido congruente, son semejantes (figura 21.5).

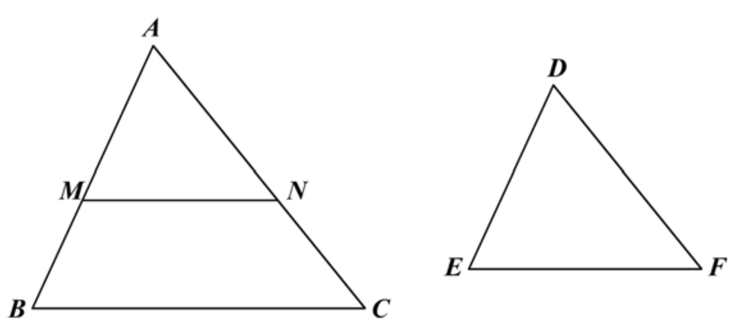


Figura 21.5

Hipótesis: ΔABC y ΔDEF

$\hat{A} \cong \hat{D}$

$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$

Tesis: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Demostración

Sea M un punto sobre $\overline{AB}$ y N sobre $\overline{AC}$ tal que $\overline{AM} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AN} \cong \overline{DF}$. (1)

Entonces $\Delta AMN \cong \Delta DEF$ por L-A-L. (2)

Como $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ (hipótesis), si sustituimos (1) obtenemos:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} \Rightarrow \frac{AB - AM}{AM} = \frac{AC - AN}{AN} \Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{NC}{AN}$$

lo cual indica que $\overline{MN}$ divide los lados del ΔABC en segmentos proporcionales y por tanto $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ (recíproco del TFSP).

Por el teorema de Tales, $\Delta AMN \sim \Delta ABC$. (3)

De (2) y (3) concluimos que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Corolario 21.1.5

Dos triángulos rectángulos que tienen sus catetos correspondientes proporcionales son semejantes.

Teorema 21.1.4: L-L-L

Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes proporcionales, son semejantes (figura 21.6).

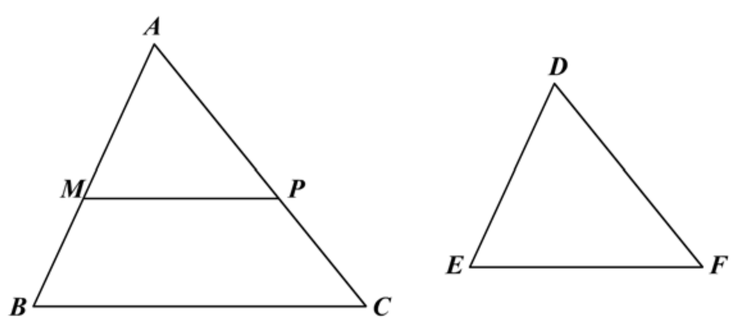


Figura 21.6

Hipótesis: ΔABC , ΔDEF

$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

Tesis: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Demostración

Sobre $\overline{AB}$ tomamos un punto M tal que $\overline{AM} \cong \overline{DE}$ y trazamos $\overline{MP} \parallel \overline{BC}$ que corta a $\overline{AC}$ en P.

Por el teorema de Tales, $\Delta AMP \sim \Delta ABC$, y por consiguiente $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AP} = \dfrac{BC}{MP}$;

pero como $AM = DE$, entonces $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{AP} = \dfrac{BC}{MP}$ (1)

De la hipótesis: $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ (2)

De (1) y (2): $AP = DF$ y $MP = EF$. Por tanto $\Delta AMN \cong \Delta DEF$ (L-L-L).
Si $\Delta AMP \sim \Delta ABC$ y $\Delta AMN \cong \Delta DEF$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Teorema 21.1.5

Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes paralelos o perpendiculares entre sí, son semejantes (figura 21.7).

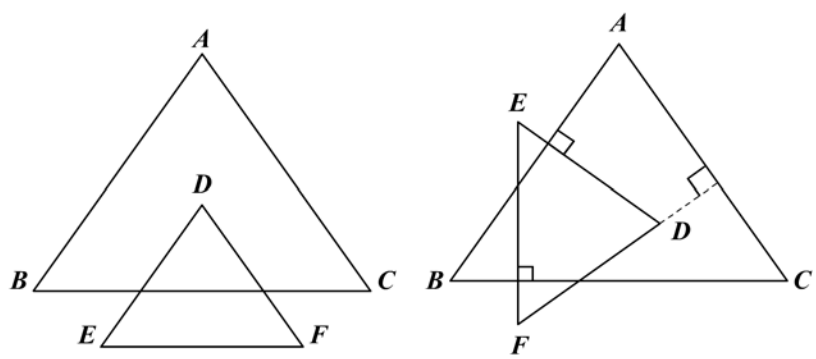


Figura 21.7

Demostración

Sean los ΔABC y DEF cuyos lados son respectivamente paralelos o perpendiculares.

Sabemos que dos ángulos que tienen sus lados paralelos o perpendiculares respectivamente son congruentes o suplementarios; podemos entonces escribir:

$$\hat{A} \cong \hat{D} \quad \text{o} \quad m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180°$$
$$\hat{B} \cong \hat{E} \quad \text{o} \quad m(\hat{B}) + m(\hat{E}) = 180°$$
$$\hat{C} \cong \hat{F} \quad \text{o} \quad m(\hat{C}) + m(\hat{F}) = 180°$$

No es posible que los ángulos sean suplementarios porque $m'(\hat{A}) + m(\hat{D}) + \cdots + m(\hat{F}) = 540° > 360°$. Luego sólo queda $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ y $\hat{C} \cong \hat{F}$ y los triángulos son semejantes por A-A.

Teorema 21.1.6

Si dos triángulos son semejantes entonces los segmentos (alturas, medianas, bisectrices) correspondientes están en la misma razón que los lados correspondientes.

La proposición anterior se da como teorema por las aplicaciones que tiene. Su demostración se deja como ejercicio.

Ejemplo 21.1.1

En la figura 21.8:

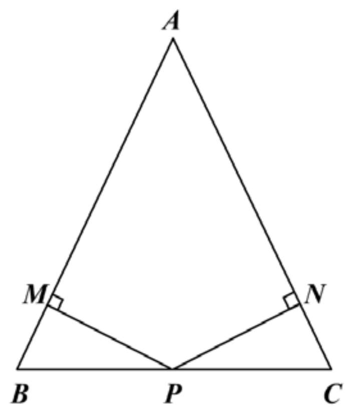


Figura 21.8

Hipótesis: triángulo isósceles ABC

$AB = AC$, $B - P - C$

$\overline{PN} \perp \overline{AC}$, $\overline{PM} \perp \overline{AB}$

Tesis: $PM \cdot CN = PN \cdot BM$

Demostración

En los triángulos rectángulos PMB y PNC se tiene $\hat{B} \cong \hat{C}$, y por tanto:

$$\Delta PMB \sim \Delta PNC \Rightarrow \frac{PM}{PN} = \frac{BM}{CN} \Rightarrow PM \cdot CN = PN \cdot BM$$

Ejemplo 21.1.2

En la figura 21.9:

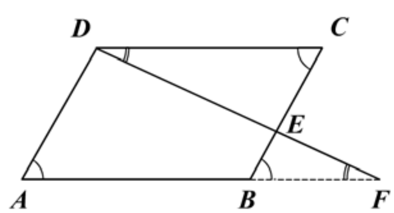


Figura 21.9

Hipótesis: paralelogramo $ABCD$

$B - E - C$; $A - B - F$

Tesis: $AF \cdot CE = DC \cdot AD$

$DE : CE = DF : AD$

Demostración

Como $ABCD$ es un paralelogramo, entonces $\hat{A} \cong \hat{C}$, $\overline{DC} \parallel \overline{ABF}$ y $C\hat{D}F \cong \hat{F}$.

$\Delta CDE \sim \Delta AFD$ (A-A) y tenemos la proporción:

$$\frac{CD}{AF} = \frac{CE}{AD} = \frac{DE}{FD} \Rightarrow CD \cdot AD = CE \cdot AF$$

$\Delta CDE \sim \Delta BFE$ (A-A) y obtenemos:

$$\frac{CD}{BF}=\frac{DE}{FE}=\frac{CE}{BE}\Rightarrow\frac{DE}{CE}=\frac{FE}{BE} \qquad (1)$$

$\Delta AFD \sim \Delta BFE$ ($\overline{BE} \parallel \overline{AD}$) y obtenemos:

$$\frac{AF}{BF}=\frac{AD}{BE}=\frac{FD}{FE}\Rightarrow\frac{FE}{BE}=\frac{FD}{AD} \qquad (2)$$

De (1) y (2): $\dfrac{DE}{CE}=\dfrac{FD}{AD}$

Ejemplo 21.1.3

Demostrar que el triángulo formado por un vértice y los pies de las alturas trazadas desde los otros dos vértices es semejante con el triángulo original (figura 21.10).

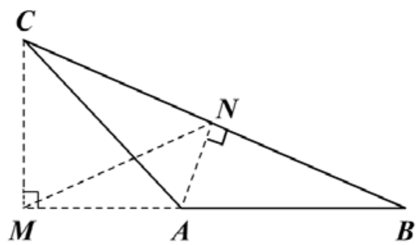


Figura 21.10

Hipótesis: ΔABC cualquiera

$\overline{CM} \perp \overline{AB}$

$\overline{AN} \perp \overline{BC}$

Tesis: $\Delta BMN \sim \Delta BCA$

Demostración

$\Delta NBA \sim \Delta MBC$ son triángulos rectángulos que tienen el ángulo agudo B común.

$\dfrac{NB}{MB}=\dfrac{BA}{BC}$ por ser $\Delta NBA \sim \Delta MBC$. Como $\hat{B}$ es común al ΔBCA y al ΔBMN, entonces $\Delta BMN \sim \Delta BCA$ por L-A-L.

Ejemplo 21.1.4

$ABCD$ es un cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en O; por O trazamos $\overline{OM}$ paralela a $\overline{BC}$ cortando a $\overline{AB}$ en M. Sea N un punto en $\overline{AD}$ tal que $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{BD}$. Demostrar que $\overline{ON}$ es paralelo a $\overline{CD}$ (figura 21.11).

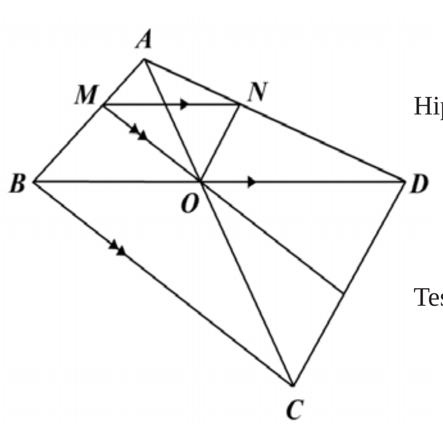


Figura 21.11

Hipótesis: cuadrilátero $ABCD$

$\overline{BD}$ corta a $\overline{AC}$ en O

$\overline{OM} \parallel \overline{BC}$, $B-M-A$

$\overline{MN} \parallel \overline{BD}$, $A-N-D$

Tesis: $\overline{ON} \parallel \overline{DC}$

Demostración

Demostremos que $\overline{ON}$ divide los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ del ΔACD en segmentos proporcionales y apliquemos el teorema 20.2.3 (recíproco del TFSP).

$\Delta AMO \sim \Delta ABC$ ($\overline{OM} \parallel \overline{BC}$: teorema de Tales). Luego: $\frac{AM}{AB} = \frac{AO}{AC} = \frac{MO}{BC}$ (1)

$\Delta AMN \sim \Delta ABD$ ($\overline{MN} \parallel \overline{BD}$: teorema de Tales). Luego: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} = \frac{MN}{BD}$ (2)

De (1) y (2) obtenemos: $\frac{AM}{AB} = \frac{AO}{AC} = \frac{AN}{AD}$ (3)

De (3): $\frac{AC}{AO} = \frac{AD}{AN} \Rightarrow \frac{AC - AO}{AO} = \frac{AD - AN}{AN} \Rightarrow \frac{OC}{AO} = \frac{ND}{AN}$,

y por el teorema recíproco del TFSP (teorema 20.2.3) concluimos que $\overline{ON} \parallel \overline{DC}$.

Ejemplo 21.1.5

En la figura 21.12:

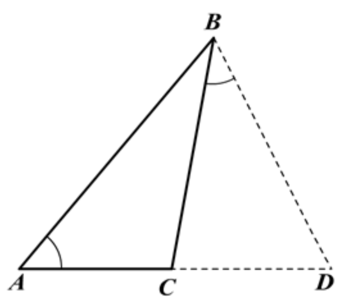


Figura 21.12

Hipótesis: ΔABC cualquiera

$\hat{A} \cong C\hat{B}D$

Tesis: $BD^2 = AD \cdot CD$

Demostración

Como $\hat{A} \cong C\hat{B}D$ y $\hat{D}$ es común a los triángulos ADB y BDC, entonces $\Delta ADB \sim \Delta BDC$ (A-A) y obtenemos la proporción:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow AD \cdot CD = BD^2$$

Ejercicios

Módulo 21

1. En cada una de las siguientes figuras (1 a 6) halle x, y según el caso.

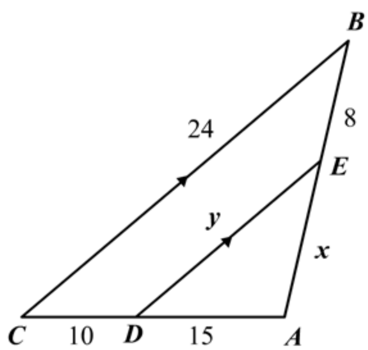


Figura 1

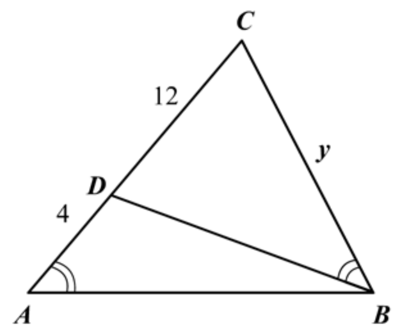


Figura 2

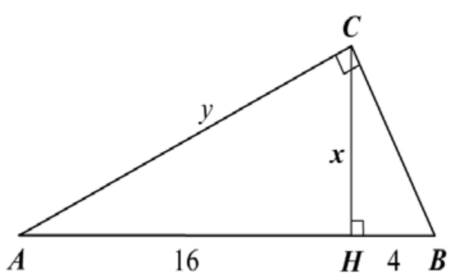


Figura 3

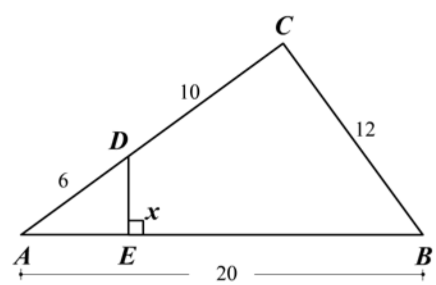


Figura 4

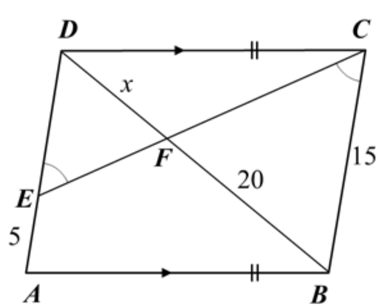


Figura 5

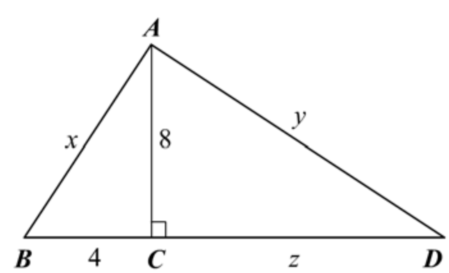


Figura 6

2. Sean $A-B-C$ y $D-B-E$ tales que $D\hat{A}B \cong B\hat{C}E$ y $CE = 3AD.$ Demuestre que $AC = 4AB.$

3. $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cortan en O. Si $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$, demuestre que $AO \cdot OD = CO \cdot OB$.

4. En el paralelogramo $ABCD$, M es el punto medio de $\overline{DC}$, y $\overline{AC}$ y $\overline{BM}$ se cortan en P. Demuestre que $PM \cdot PB = PA \cdot PC$.

5. En el triángulo ABC, $A-D-C$ y $B-E-C$ tales que $DB = DA$ y $\overline{DE}$ biseca a $B\hat{D}C$. Demuestre que $AB : BC = DE : EC$.

6. En el triángulo ABC, $A-D-B$ y $m(\hat{C}) = 2m(\hat{A})$ tales que $\overline{CD}$ biseca a $\hat{C}$, $AC = b$, $BC = a$ y $AB = c$. Demuestre que $c = \sqrt{a^2 + ab}$.

7. Se tiene $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, con $\overline{AM}$ y $\overline{DN}$ medianas. Demuestre que $AM : DN = BC : EF$.

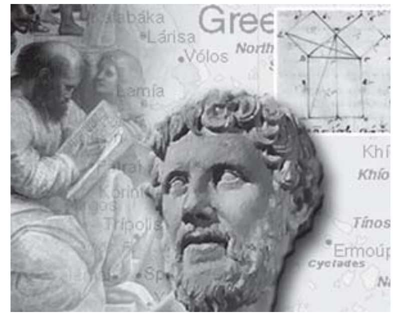
8. En el triángulo ABC, $\overline{BD}$ es bisectriz de $\hat{B}$, y $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ con $A-E-B$. Pruebe que $AD : DC = AE : ED$.

9. En el triángulo ABC, $\overline{CM}$ es la bisectriz exterior de $\hat{C}$ con $M-A-B$, y $CA = CN$ con $C-N-B$. Pruebe que $AN : CM = BN : BC$.

10. En el triángulo ABC, $C-D-A$ y $A-E-B$ tales que $\overline{CE} \perp \overline{DB}$ en O. Pruebe que $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AC}{DC}$.

Módulo 22

Relaciones métricas



Pit•goras

(c. 572- c. 497 a.C.). FilÛsofo y matem•tico griego nacido en la isla de Samos y muerto en Metaponto (hoy desaparecida).

Contenidos del mÛdulo

22.1 Relaciones métricas en el triángulo rectángulo
22.2 Relaciones métricas en un triángulo cualquiera

Objetivos del mÛdulo

1. Definir qué es una relación métrica.
2. Definir la proyección ortogonal.
3. Deducir el teorema de Pitágoras.
4. Establecer relaciones entre los segmentos de un triángulo rectángulo.
5. Relacionar los segmentos notables con los lados de un triángulo cualquiera.

Preguntas b•sicas

1. ¿Qué es una relación métrica?
2. ¿Qué es una proyección ortogonal?
3. ¿Qué relaciones se pueden establecer entre los lados de un triángulo rectángulo?
4. ¿Qué propiedades tiene la altura relativa a la hipotenusa en un triángulo rectángulo?
5. ¿Cómo están relacionados entre sí los lados de un triángulo?
6. ¿Cómo se relaciona un segmento con los lados de un triángulo?
7. ¿Qué relación se puede establecer entre la mediana, la bisectriz y la altura con los lados del triángulo?
8. ¿Qué otras relaciones se pueden establecer entre segmentos de un triángulo?

IntroducciÛn

Esta sección empieza definiendo dos conceptos básicos: relación métrica y proyección ortogonal. Luego se estudian las relaciones que se pueden establecer entre los lados de un triángulo rectángulo, especialmente el teorema de Pitágoras. El módulo avanza con las relaciones que se pueden establecer entre los lados, y entre los segmentos notables y los lados de un triángulo cualquiera. Por último, se presentan teoremas clásicos de la geometría, como son el de Steiner-Lemus, el de Euler, el de Menelao y el de Ceva.

Vea el mÛdulo 22 del programa de televisiÛn *GeometrÌa Euclidiana*

22.1 Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

Definición 22.1.1

Una relación métrica entre varias longitudes es una relación algebraica entre los números que representan dichas longitudes en las mismas unidades.

En adelante, cuando se menciona producto de segmentos o de lados, cuadrado de un lado, mediana, bisectriz o altura, suma o diferencia de segmentos o lados, etc., nos estamos refiriendo a los números que indican las medidas o longitudes de dichos elementos.

Definición 22.1.2

Se llama proyección ortogonal de un punto sobre una recta (o un plano) el pie de la perpendicular bajada del punto a la recta (o al plano) (figura 22.1). (P' es la proyección de P sobre ℓ.)

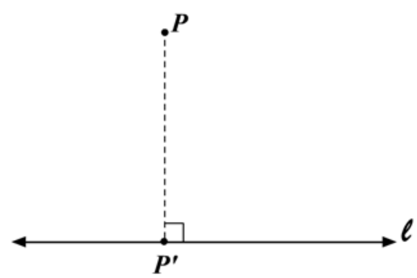


Figura 22.1

Definición 22.1.3

La proyección ortogonal de un segmento sobre una recta (o plano) es el segmento cuyos extremos son las proyecciones de los extremos del segmento (figura 22.2).

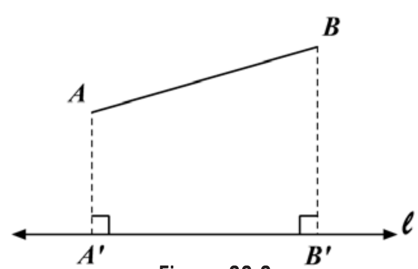


Figura 22.2

En la figura 22.2, A' y B' son las proyecciones de los puntos extremos A y B; y $\overline{A'B'}$ es la proyección de $\overline{AB}$ sobre la recta ℓ.

Si el segmento y la recta son paralelos, la proyección es congruente con el segmento dado y su longitud es real.

En cualquier triángulo una altura siempre determina sobre el lado segmentos que son las proyecciones de los otros dos lados (figura 22.3).

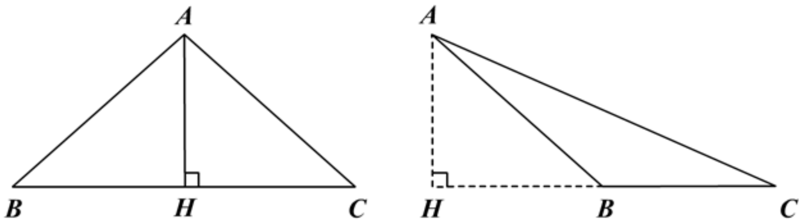


Figura 22.3

Así, en la figura 22.3 en el ΔABC, la altura AH determina los segmentos BH y HC que son las proyecciones de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, sobre $\overline{BC}$.

Teorema 22.1.1

En todo triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa determina dos triángulos rectángulos semejantes entre sí y semejantes al triángulo original (figura 22.4).

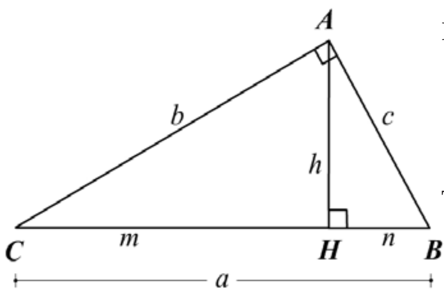


Figura 22.4

Hipótesis: ΔABC rectángulo en A

$\overline{AH} \perp \overline{CB}$

$AB = c$, $BC = a$, $AC = b$

$AH = h$, $CH = m$, $HB = n$

Tesis: $\Delta CHA \sim \Delta AHB \sim \Delta CAB$

Demostración

$\hat{C} \cong H\hat{A}B$ por ser complementos de $\hat{B}$ y los tres triángulos son semejantes por tener un ángulo agudo congruente, es decir: $\Delta CHA \sim \Delta AHB \sim \Delta CAB$.

Corolario 22.1.1

La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos que determina sobre ella (figura 22.4).

Como $\Delta CHA \sim \Delta AHB$, entonces :

1. $$\frac{CH}{AH} = \frac{HA}{HB} = \frac{CA}{AB} \Rightarrow \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = m \cdot n \qquad (1)$$

Corolario 22.1.2

Todo cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección del cateto sobre la hipotenusa.

Como $\Delta CHA \sim \Delta CAB$, obtenemos:

2. $$\frac{CH}{CA} = \frac{HA}{AB} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow \frac{m}{b} = \frac{h}{c} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = a \cdot m \qquad (2)$$

Pitágoras

Los estudios más importantes realizados por la escuela de Pitágoras fueron el de los números primos y el de los cuadrados, esenciales en la teoría de los números. Desde este punto de vista aritmético cultivaron el concepto de *número*, que llegó a ser para ellos el principio crucial de toda proporción, orden y armonía en el universo. En geometría el gran descubrimiento de la escuela fue el teorema de la hipotenusa, conocido como teorema de Pitágoras, que establece que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

Como $\Delta AHB \sim \Delta CAB$, obtenemos:

3. $\dfrac{AH}{CA}=\dfrac{HB}{AB}=\dfrac{AB}{CB}\Rightarrow\dfrac{h}{b}=\dfrac{n}{c}=\dfrac{c}{a}\Rightarrow c^2=a\cdot n$ (3)

Corolario 22.1.3
El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Sumando las relaciones (2) y (3) del corolario 22.1.2, obtenemos:

$$b^2+c^2=am+an=a(m+n)=a\cdot a=a^2$$

Por tanto $a^2=b^2+c^2$.
La relación anterior se conoce como teorema de Pitágoras.

Corolario 22.1.4
El cuadrado de la razón entre los catetos es igual a la razón entre sus respectivas proyecciones sobre la hipotenusa.

Dividiendo las relaciones (2) y (3) del corolario 22.1.2, obtenemos:

$$\frac{b^2}{c^2}=\frac{am}{an}\Rightarrow\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{m}{n}$$

Corolario 22.1.5
El cuadrado de la razón entre la hipotenusa y un cateto es igual a la razón entre la hipotenusa y la proyección del cateto sobre ella.

Usando la relación (2) o (3) del corolario 22.1.2, obtenemos:

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^2}{am}\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{m}$$

$$\frac{a^2}{c^2}=\frac{a^2}{an}\Rightarrow\left(\frac{a}{c}\right)^2=\frac{a}{n}$$

Corolario 22.1.6
La altura a la hipotenusa es cuarta proporcional entre la hipotenusa y los catetos.

De la proporción (2) (corolario 22.1.2), obtenemos:

$$\frac{h}{c}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{h}$$

Corolario 22.1.7
En un triángulo rectángulo el cuadrado del inverso de la altura es igual a la suma de los cuadrados de los inversos de los catetos.

De los corolarios 22.1.1, 22.1.2 y 22.1.3 tenemos las relaciones:

$$h^2 = m \cdot n\,,\ b^2 = a \cdot m\,,\ c^2 = a \cdot n\,,\ a^2 = b^2 + c^2$$

Por tanto $b^2 \cdot c^2 = a^2 m \cdot n \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 h^2$ y obtenemos

$$\frac{a^2}{a^2h^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 \cdot c^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$$

22.2 Relaciones métricas en un triángulo cualquiera

El siguiente teorema es una generalización del teorema de Pitágoras y nos permite expresar un lado de un triángulo en función de los otros. En trigonometría se le conoce como *teorema del coseno*.

Teorema 22.2.1

En todo triángulo el cuadrado de la medida de un lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados menos el doble producto de uno de ellos y la proyección del otro sobre él (figura 22.5).

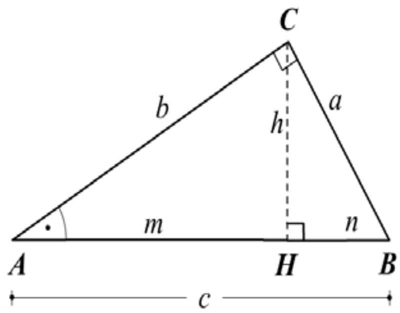


Figura 22.5

Hipótesis: ΔABC con $AB = c$, $BC = a$,
$AC = b$, $\overline{CH} \perp \overline{AB}$, $AH = m$
$HB = n$, $CH = h$

Tesis: $b^2 = a^2 + c^2 - 2c \cdot n$

Demostración

En el ΔCHA se tiene que $b^2 = m^2 + h^2$ (1)

En el ΔABC de la figura 22.5 se tiene que $m = c - n$.

Ahora bien: $m^2 = (c-n)^2 = (n-c)^2 = n^2 + c^2 - 2nc$ (2)

En el ΔCHB se tiene $h^2 = a^2 - n^2$ (3)

Reemplazando (2), (3) en (1) obtenemos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2cn$$

Teorema 22.2.2

En todo triángulo el cuadrado de la medida del lado opuesto a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados, más el doble producto de la medida de uno de ellos y la medida de la proyección del otro sobre él (figura 22.6).

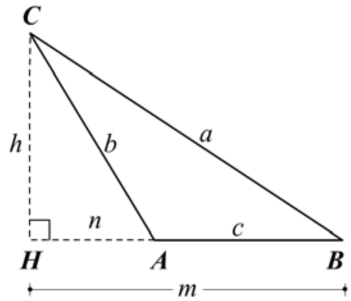


Figura 22.6

Hipótesis: ΔABC con $AB = c$, $BC = a$

$AC = b$; $\overline{CH} \perp \overline{AB}$: altura

$HA = n$, $HB = m$

Tesis: $a^2 = b^2 + c^2 + 2cn$

Demostración

En el ΔCHB se tiene $a^2 = h^2 + m^2$ (1)

En el ΔCHA se tiene $h^2 = b^2 - n^2$ (2)

En el ΔCHB se tiene $m = c + n \Rightarrow m^2 = c^2 + n^2 + 2c \cdot n$ (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) obtenemos: $a^2 = b^2 + c^2 + 2cn$

El siguiente teorema nos permite calcular la longitud del segmento que une un vértice con un punto cualquiera del lado opuesto.

Teorema 22.2.3: De Stewart

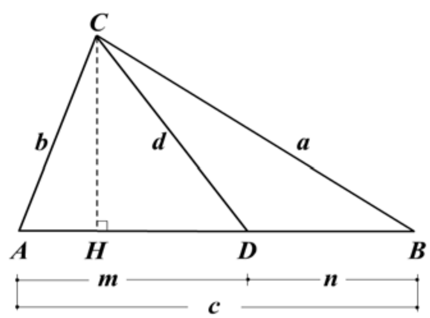


Figura 22.7

Hipótesis: ΔABC cualquiera

$\overline{CH} \perp \overline{AB}$

$AB = c$, $BC = a$, $CA = b$

$CD = d$, $DA = m$, $DB = n$

Tesis: $d^2c = a^2m + b^2n - cmn$

Demostración

Si en el ΔADC el ángulo ADC es agudo obtenemos, por el teorema 22.2.1:

$$b^2 = d^2 + m^2 - 2m \cdot HD \qquad (1)$$

Si en el ΔCDB el ángulo CDB es obtuso, por el teorema 22.2.2 obtenemos:

$$a^2 = d^2 + n^2 + 2n \cdot HD \qquad (2)$$

Si (1) la multiplicamos por n y (2) por m, obtenemos:

$$b^2n = d^2n + m^2n - 2m \cdot n \cdot HD \qquad (3)$$

$$a^2m = d^2m + n^2m + 2n \cdot m \cdot HD \qquad (4)$$

Sumando (3) y (4) obtenemos:

$$a^2m + b^2n = d^2(m+n) + mn(m+n)$$

Pero $m + n = c$, y organizando tenemos:

$$d^2c = a^2m + b^2n - cmn$$

Nota: este teorema fue enunciado sin demostrar por Mattew Stewart (1717-1785) en 1746; fue redescubierto y demostrado por Thomas Simpson (1710-1763) en 1751, por Leonhard Euler (1707-1783) en 1780 y por Lazare Nicolas Carnot (1753-1823) en 1803.

Corolario 22.2.1
En todo triángulo la suma de los cuadrados de las medidas de dos lados es igual a dos veces el cuadrado de la medida de la mediana relativa al tercer lado, más la mitad del cuadrado de la medida de este lado (figura 22.8).

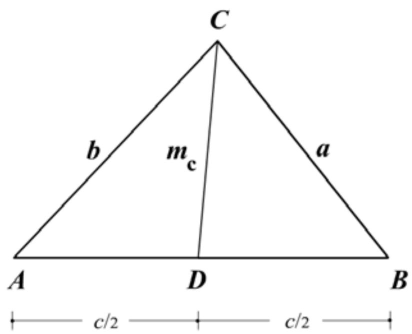


Figura 22.8

Hipótesis: ΔABC cualquiera

$\overline{CD}$ mediana

$AB = c$, $BC = a$, $CA = b$

Tesis: $a^2 + b^2 = 2(m_c)^2 + \dfrac{c^2}{2}$

Demostración

Como $\overline{CD}$ es mediana, entonces $AD = c/2 = DB$. Para aplicar el teorema de Stewart se tiene: $m = AD = c/2$; $n = DB = c/2$; $\overline{CD} = d = m_c$. Si sustituimos en $d^2c = a^2m + b^2n - cmn$, obtenemos:

$$(m_c)^2 c = a^2 \cdot \frac{c}{2} + b^2 \cdot \frac{c}{2} - c \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2}$$

Simplificando y organizando obtenemos:

$$a^2 + b^2 = 2(m_c)^2 + \frac{c^2}{2}$$

Corolario 22.2.2: La mediana en función de los lados
El resultado del corolario anterior nos permite expresar la mediana en función de los lados, así:

$$(m_c)^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{c}{2}\right)^2$$, o sea:

«En todo triángulo el cuadrado de la medida de la mediana es igual a la semisuma de los cuadrados de las medidas de los lados adyacentes menos el cuadrado de la mitad del tercer lado» (figura 22.8).

Corolario 22.2.3
En todo triángulo la diferencia de los cuadrados de las medidas de dos lados es igual a dos veces el producto de la medida del tercer lado y la medida de la proyección de la mediana relativa a este lado (figura 22.7).

Demostración

Si de la demostración del teorema de Stewart tomamos las expresiones (3) y (4):

$$a^2 m = d^2 m + n^2 m + 2n \cdot m \cdot HD$$

$$b^2 n = d^2 n + m^2 n - 2n \cdot m \cdot HD$$

y los restamos, obtenemos:

$$a^2 m - b^2 n = d^2 (m-n) + n \cdot m (n-m) + 4n \cdot m \cdot HD$$

Si CD en la figura 22.7 es mediana: $m = AD = c/2 = n = DB$.

Por tanto $a^2 \cdot \frac{c}{2} - b^2 \cdot \frac{c}{2} = 4 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot DH$

De donde: $a^2 - b^2 = 2c \cdot DH$.

Teorema 22.2.4

En todo triángulo la diferencia de los cuadrados de las medidas de dos lados es igual a la diferencia de los cuadrados de las medidas de sus respectivas proyecciones sobre el tercer lado (figura 22.9).

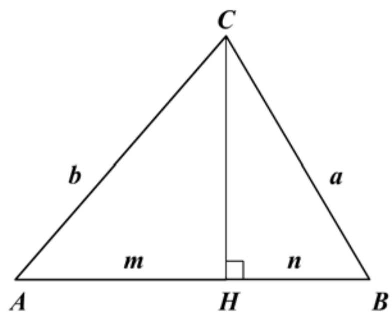


Figura 22.9

Hipótesis: ΔABC cualquiera

$AC = b$, $BC = a$, $\overline{CH} \perp \overline{AB}$

$AH = m$, $BH = n$

Tesis: $a^2 - b^2 = n^2 - m^2$

Demostración

Si aplicamos el teorema de Pitágoras en el ΔAHC y en el ΔBHC, obtenemos:

$a^2 = n^2 + CH^2$, $b^2 = m^2 + CH^2$, y restando:

$a^2 - b^2 = n^2 - m^2$

Ejemplo 22.2.1

Demostrar que en todo triángulo la suma de los cuadrados de las medidas de las medianas es $\frac{3}{4}$ de la suma de los cuadrados de las medidas de los lados (figura 22.10).

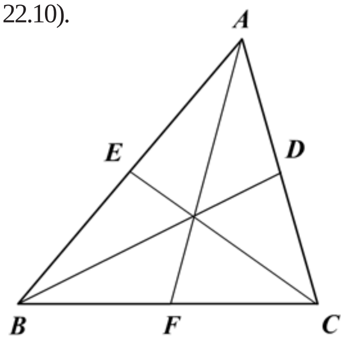


Figura 22.10

Hipótesis: ΔABC cualquiera

$\overline{AF}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$ medianas

$AF = m_a$, $BD = m_b$, $CE = m_c$

$AB = c$, $BC = a$, $AC = b$

Tesis: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

Solución

Aplicando sucesivamente el corolario 22.2.2 para cada mediana, tenemos:

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$m_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$m_c^2 = \frac{b^2+a^2}{2} - \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

Sumando miembro a miembro:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{b^2+c^2+a^2+c^2+b^2+a^2}{2} - \frac{a^2+b^2+c^2}{4}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Ejemplo 22.2.2: La bisectriz en función de los lados

Determinar la medida del segmento de bisectriz del ángulo interior de un triángulo en función de los lados del triángulo (figura 22.11).

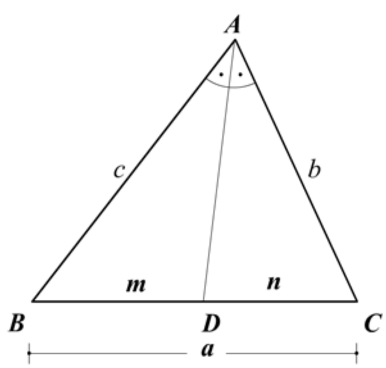


Figura 22.11

Hipótesis: ΔABC cualquiera

$\overline{AD}$ bisectriz del $\hat{A}$

$AD = b_a$, $BD = m$, $DC = n$

$BC = a$, $AB = c$, $AC = b$

Tesis: $b_a = \sqrt{bc - \dfrac{bc}{(b+c)^2}a^2}$

Solución

De acuerdo con el teorema de Stewart:

$$(b_a)^2\, a = b^2 m + c^2 n - am\cdot n \qquad (1)$$

Por el teorema de la bisectriz:

$$\frac{m}{n} = \frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{m+n}{n} = \frac{c+b}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{n} = \frac{c+b}{b} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{a\cdot b}{c+b} \qquad (2)$$

$$\frac{n}{m} = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{n+m}{m} = \frac{b+c}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{m} = \frac{b+c}{c} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{a\cdot c}{b+c} \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos:

$$\left(b_a\right)^2 a = b^2\frac{ac}{b+c} + c^2\frac{ab}{c+b} - a\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c}$$

Simplificando obtenemos:

$$\left(b_a\right)^2 = bc - \frac{bc}{\left(b+c\right)^2}a^2 \quad \Rightarrow \quad b_a = \sqrt{bc - \frac{bc}{\left(b+c\right)^2}\cdot a^2}$$

Nota: la bisectriz podemos expresarla en términos del perímetro del triángulo, así:

$$b_a = \sqrt{\frac{bc}{\left(b+c\right)^2}\left[\left(b+c\right)^2 - a^2\right]} = \sqrt{\frac{bc}{\left(b+c\right)^2}\left(b+c+a\right)\left(b+c-a\right)}$$

Como $2p = a+b+c$, entonces:

$$2p - 2a = b + c - a$$

Por tanto: $b_a = \dfrac{1}{b+c}\sqrt{bc(2p)(2p-2a)}$

$$b_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

donde *b* y *c* son los lados adyacentes a la bisectriz y *p* es el semiperímetro.

Entonces: $b_c = \dfrac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$ y $b_b = \dfrac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$

Ejemplo 22.2.3: Fórmula de Herón de Alejandría

Determinar la medida de la altura de un triángulo en función de la medidas de los lados (figura 22.12).

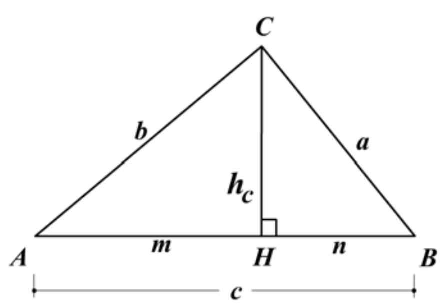


Figura 22.12

Hipótesis: triángulo ABC

$AB = c,\ CA = b,\ AC = a$

$CH = h_c$: altura

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$: semiperímetro

Tesis: $h_c = \dfrac{2}{c}\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$

En el ΔAHC, aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene: $h_c^2 = b^2 - m^2$. (1)

Como $\hat{A}$ es agudo, por el teorema 22.2.1 obtenemos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$. (2)

Despejando de (2) a *m*, elevando al cuadrado y reemplazando en (1), se llega a:

$$h_c^2 = b^2 - \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4c^2}.$$

Reducciendo a un común denominador: $4c^2h_c^2 = 4c^2b^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2$.

Descomponiendo como un producto de factores:

$$4c^2h_c^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \qquad (3)$$

Como el perímetro es $2p = a+b+c$, si restamos la misma cantidad $(2a$ o $2b$ o $2c)$ al perímetro obtenemos: $2(p-a) = b+c-a$; $2(p-b) = a+c-b$; $2(p-c) = a+b-c,$ y al sustituir en (3) se obtiene:

$$4c^2h_c^2 = 2p.2(p-c).2(p-b).2(p-a).$$

Simplificando: $h_c^2 = \dfrac{4p}{c^2}(p-a)(p-b)(p-c).$

Luego $h_c = \dfrac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, donde p es el semiperímetro.

Nota: un escritor árabe dice que Arquímedes fue el descubridor de la fórmula $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ del área de un triángulo en función de los lados. Esta fórmula se encuentra en un trabajo posterior de Herón de Alejandría.

Ejemplo 22.2.4: Teorema de Steiner-Lehmus

Si las bisectrices de dos ángulos de un triángulo son congruentes, el triángulo es isósceles (figura 22.13).

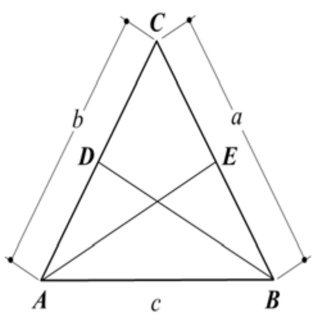


Figura 22.13

Hipótesis: ΔABC

$\overline{AE}$ bisectriz de $\hat{A}$

$\overline{BD}$ bisectriz de $\hat{B}$

$\overline{AE} \cong \overline{BD}$; $AB = c$, $BC = a$,

$CA = b$

$AE = b_a$, $BD = b_b$

Tesis: ΔABC isósceles

Demostración

Del ejemplo 22.2.2, tenemos:

$$AE^2 = b_a^2 = bc - \frac{bc}{(b+c)^2}a^2 \text{ ; } BD^2 = b_b^2 = ac - \frac{ac}{(a+c)^2}b^2 \text{ ; como } \overline{AE} \cong \overline{BD} \text{ ,}$$

entonces $b_a^2 = b_b^2$, y por tanto:

$$bc - \frac{bca^2}{(b+c)^2} = ac - \frac{acb^2}{(a+c)^2} \quad \Rightarrow \quad bc - \frac{bca^2}{(b+c)^2} - ac + \frac{acb^2}{(a+c)^2} = 0$$

Factorizando:

$$\Rightarrow \quad bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) - ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right) = 0$$

Simplificando:

$$\Rightarrow \quad b(b+c-a)(b+c+a)-a(a+c-b)(a+b+c)=0$$

$$\Rightarrow \quad (b+c+a)\left[b^2+bc-ab-a^2-ac+ab\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad b^2-a^2+bc-ac=0$$

$$\Rightarrow \quad (b-a)(b+a)+c(b-a)=0$$

$$\Rightarrow \quad (b-a)(b+a+c)=0$$

Como $(b+a+c)>0$, entonces $b-a=0$ y $b=a$. Luego ΔABC es isósceles.

Nota: este teorema fue propuesto por primera vez en 1840 por C. L. Lehmus y lo demostró Jacobo Steiner.

Ejemplo 22.2.5: Teorema de Euler

En todo cuadrilátero la suma de los cuadrados de las medidas de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de las diagonales más cuatro veces el cuadrado de la medida del segmento que une los puntos medios de las diagonales (figura 22.14).

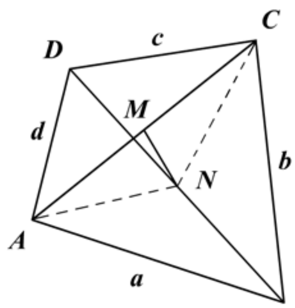


Figura 22.14

Hipótesis: cuadrilátero *ABCD*

M punto medio de $\overline{AC}$

N punto medio de $\overline{BD}$

$AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$

Tesis: $a^2+b^2+c^2+d^2=AC^2+BD^2+4MN^2$

Demostración

Trazamos $\overline{AN}$ y $\overline{CN}$ que son medianas por ser N punto medio.

Si aplicamos la mediana en función de los lados (corolario 22.2.2) en forma sucesiva en los triángulos *DAB, DCB* y *ANC,* tenemos:

$$AN^2=\frac{a^2+d^2}{2}-\left(\frac{DB}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 2AN^2=\frac{2a^2+2d^2-BD^2}{2} \qquad (1)$$

$$CN^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\left(\frac{DB}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 2CN^2=\frac{2b^2+2c^2-BD^2}{2} \qquad (2)$$

$$MN^2=\frac{AN^2+CN^2}{2}-\left(\frac{AC}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad MN^2=\frac{2AN^2+2CN^2-AC^2}{4} \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3) obtenemos:

$$4MN^2=\frac{2a^2+2d^2-BD^2}{2}+\frac{2b^2+2c^2-BD^2}{2}-AC^2$$

$$4MN^2=\frac{2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-2BD^2-2AC^2}{2}$$

$$4MN^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - BD^2 - AC^2$$

$$\therefore\ AC^2 + BD^2 + 4MN^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Ejemplo 22.2.6

Desde un punto *P* interior a un triángulo *ABC* se trazan segmentos perpendiculares a los lados en *M*, *N* y *Q* con $A-M-B$, $B-N-C$ y $C-Q-A$. Demostrar que $BN^2 + CQ^2 + AM^2 = NC^2 + QA^2 + BM^2$ (figura 22.15).

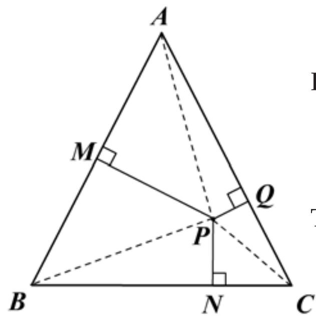


Figura 22.15

Hipótesis: ΔABC con $P \in$ interior, $\overline{PM} \perp \overline{AB}$, $\overline{PQ} \perp \overline{AC}$, $\overline{PN} \perp \overline{BC}$.

Tesis: $BN^2 + CQ^2 + AM^2 = NC^2 + QA^2 + MB^2$

Demostración

Unimos a *P* con los vértices. Apliquemos el teorema 22.2.4 en:

a. ΔBPC: $PB^2 - PC^2 = BN^2 - NC^2$

b. ΔCPA: $CP^2 - PA^2 = CQ^2 - QA^2$

c. ΔBPA: $PA^2 - PB^2 = AM^2 - MB^2$

Sumando, obtenemos:

$$0 = BN^2 + CQ^2 + AM^2 - \left(MB^2 + QA^2 + NC^2\right)$$

$$\therefore\ BN^2 + CQ^2 + AM^2 = MB^2 + QA^2 + NC^2$$

Ejemplo 22.2.7: Teorema de Menelao

Si una secante corta los tres lados de un triángulo, entonces el producto de las medidas de los tres segmentos que no tienen extremos comunes es igual al producto de las medidas de los otros segmentos (figura 22.16).

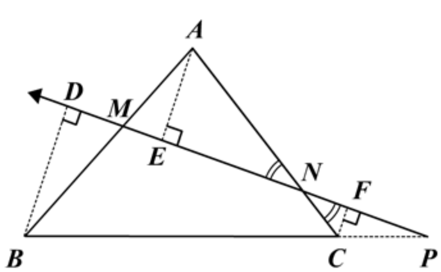


Figura 22.16

Hipótesis: ΔABC cualquiera

$\ell \cap \overline{AB} = \{M\}$

$\ell \cap \overline{AC} = \{N\}$

$\ell \cap \overline{BC} = \{P\}$

Tesis: $AM \cdot BP \cdot NC = BM \cdot CP \cdot AN$

Demostración

Trazamos $\overline{BD}$, $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ perpendiculares a la recta ℓ y tenemos $\Delta DMB \sim \Delta EMA$ (¿por qué?)

$$\frac{DM}{EM} = \frac{MB}{MA} = \frac{DB}{EA} \quad \Rightarrow \quad \frac{MA}{MB} = \frac{EA}{DB} \quad \Rightarrow \quad \frac{MA}{MB} \cdot \frac{DB}{EA} = 1 \qquad (1)$$

$\Delta AEN \sim \Delta CFN$ (¿por qué?)

$$\frac{AE}{CF} = \frac{AN}{CN} = \frac{EN}{FN} \quad \Rightarrow \quad \frac{AE}{CF} = \frac{AN}{CN} \quad \Rightarrow \quad \frac{AE}{CF} \cdot \frac{CN}{AN} = 1 \qquad (2)$$

$\Delta DBP \sim \Delta FCP$ ¿por qué?

$$\frac{DB}{FC} = \frac{BP}{CP} = \frac{DP}{FP} \quad \Rightarrow \quad \frac{DB}{FC} = \frac{BP}{CP} \quad \Rightarrow \quad \frac{BP}{CP} \cdot \frac{FC}{DB} = 1 \qquad (3)$$

Multiplicando (1), (2) y (3) obtenemos:

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{DB}{EA} \cdot \frac{AE}{CF} \cdot \frac{CN}{AN} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{FC}{DB} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{MA}{MB} \cdot \frac{CN}{AN} \cdot \frac{BP}{CP} = 1 \quad \Rightarrow \quad MA \cdot CN \cdot BP = MB \cdot AN \cdot CP$$

Ejemplo 22.2.8: Teorema de Ceva

Las rectas que unen los vértices de un triángulo con un mismo punto O determinan sobre los lados seis segmentos tales que el producto de las medidas de tres de ellos sin extremos comunes, es igual al producto de los otros tres (figura 22.17).

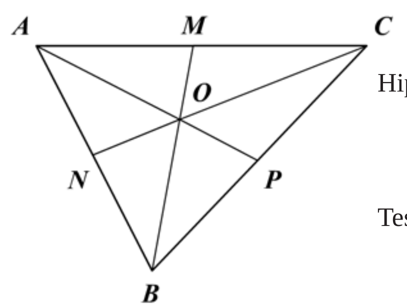


Figura 22.17

Hipótesis: ΔABC cualquiera

$A - M - C$, $B - C - P$, $A - N - B$

$\overline{CN} \cap \overline{BM} \cap \overline{AP} = \{0\}$

Tesis: $CM \cdot AN \cdot BP = AM \cdot NB \cdot PC$

Demostración

Consideremos el ΔANC y la secante $\overline{BOM}$. Por el teorema de Menelao:

$$CM \cdot AB \cdot ON = MA \cdot NB \cdot OC \qquad (1)$$

Consideremos el ΔCNB y la secante $\overline{POA}$. Por el teorema de Menelao:

$$CP \cdot BA \cdot ON = PB \cdot NA \cdot OC \qquad (2)$$

De (1) tenemos: $\dfrac{CM}{MA}\cdot\dfrac{AB}{BN}\cdot\dfrac{NO}{OC}=1$ (3)

De (2) tenemos: $\dfrac{PB}{PC}\cdot\dfrac{AN}{AB}\cdot\dfrac{OC}{ON}=1$ (4)

Multiplicando (3) y (4) y simplificando, obtenemos: $\dfrac{CM}{MA}\cdot\dfrac{AN}{NB}\cdot\dfrac{BP}{PC}=1$

Ejercicios
Módulo 22

En la figura 1 el ΔABC es rectángulo en A y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

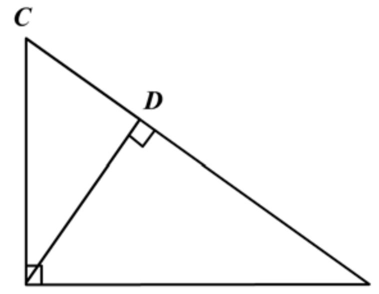


Figura 1

1. Si $BD = 12$ y $DC = 4$, halle AD.
2. Si $BC = 20$ y $DC = 4$, halle AC.
3. Si $BD = 9$ y $AB = 24$, halle CD.
4. Si $AC = 15$, $CD = 9$ y $AD = 21$, halle AB.

En la figura 2 halle x de acuerdo con los datos dados.

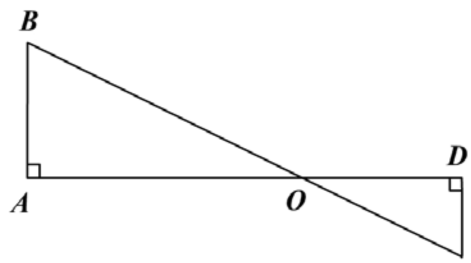


Figura 2

5. $AB = 5$; $BC = 20$; $DC = 7$; $AD = x$.
6. $AB = 15$; $OA = 8$; $DC = 12$; $BC = x$.
7. $AB = 10$; $DC = 6$; $AD = 12$; $BC = x$.

8. Complete la siguiente tabla de acuerdo con la figura 3.

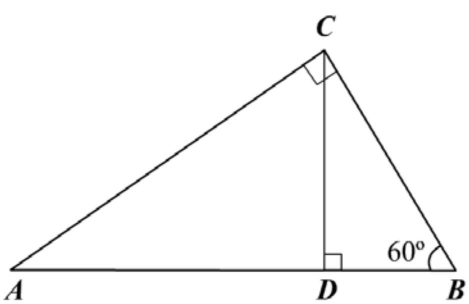


Figura 3

AB						8
BC					2	
CD				$4\sqrt{3}$		
DA			9			
DB		$10\sqrt{3}$				
AC	$8\sqrt{3}$					

9. En la figura 4 $ABCD$ es un cuadrado de lado a, con $m(A\hat{B}E) = 30° \overline{AF} \perp \overline{BE}$ en H. Halle: AH, AE, BH, EH, DF y HF.

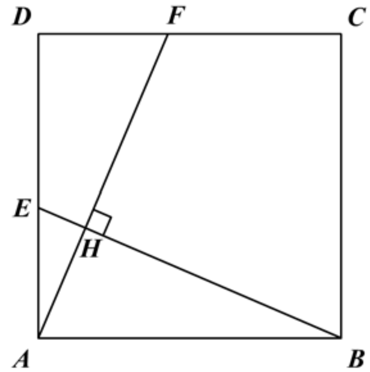


Figura 4

10. Si la diagonal de un cuadrado mide $5\sqrt{2}$, ¿cuál es la medida del lado del cuadrado?

11. En un rectángulo la razón entre los lados diferentes es 2:5. Si el producto de los lados es 6.250, ¿cuál es la medida de los lados?

12. Las diagonales AC y BD del rombo $ABCD$ se cortan en O. Si $BD = 2\sqrt{3}$ y $AD = 5\sqrt{3}$, halle AO.

13. Las diagonales AC y BD de un trapecio rectángulo $ABCD$ se cortan en O. Si $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AD} \perp \overline{DC}$, $AD = DC = a$ y $AB = 2a$, encuentre AO, BO, CO y DO.

14. ABC es un triángulo rectángulo en A, con $\overline{AD}$ bisectriz interior de $\hat{A}$ y $\overline{AE}$ bisectriz exterior de $\hat{A}$ ($B - D - C - E$). Si $AB = 28$ y $AC = 21$, halle DE.

15. En un triángulo rectángulo isósceles ABC, de base BC, se traza $\overline{CD}$ perpendicular a $\overline{AB}$. Establezca la relación $AB^2 + BC^2 + CA^2 = BD^2 + 2DA^2 + 3CD^2$.

16. ABC es un triángulo rectángulo en A. Desde el punto medio de D de $\overline{AB}$ se traza $\overline{DE}$ perpendicular a $\overline{BC}$. Establezca la relación $EC^2 - EB^2 = AC^2$. (Sugerencia: trace $\overline{DC}$.)

17. En un triángulo equilátero ABC, $AH = h$ es la altura y $B - H - D - C$ tal que $DC = \frac{1}{4}BC = \frac{1}{4}\ell$. Halle AD:

a. En función del lado a.
b. En función de la altura h.

18. En un triángulo ABC rectángulo en A, se da $A - D - B$ y $C - F - E - B$ tales que $AD = 8$, $\overline{DF} \perp \overline{AB}$ y $\overline{DE} \perp \overline{BC}$. Si $BC = 40$ y $AC = 32$, halle el perímetro del triángulo DEF.

19. $ABCD$ es un cuadrado de lado ℓ. Exteriormente se construye el triángulo equilátero BCP. Halle la medida de $\overline{AP}$.

20. ABC es un triángulo rectángulo en A, y F es el punto medio de $\overline{AB}$. Se da $C-A-B$ tal que $ADEF$ es un cuadrado. Si $AB = 4a$ y $AC = 3a$, halle CE.

21. Si en un paralelogramo $ABCD$, $DC = 32$, $CB = 17$ y $AC = 43$, encuentre el valor de DB.

22. Los lados del triángulo ABC miden: $AB = 30$, $BC = 36$, $AC = 12$. Halle el valor de las medidas de las bisectrices AD, BE y CF.

23. Demuestre que en todo paralelogramo la suma de los cuadrados de las medidas de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los lados.

24. Las medidas de los lados de un triángulo son 39, 41 y 50 cm. Halle la altura relativa al lado que mide 50 cm.

25. Los lados de un triángulo miden 7, 9 y 14 cm. Halle las medidas de las proyecciones de los dos primeros lados sobre el tercero.

26. ABC es un triángulo rectángulo en A. Si $B-D=E=C$ son tales que $BD = DE = EC$, demuestre que $AD^2 + AE^2 + DE^2 = \frac{2}{3}BC^2$.

27. Un lado de un triángulo mide 60 y la altura y la mediana relativas a dicho lado miden 12 y 13, respectivamente. Calcule el perímetro del triángulo.

28. Los lados a, b, c de un triángulo miden 20, 32 y 46, respectivamente. Calcule:

    a. La altura relativa al lado mayor.
    b. La bisectriz del ángulo mayor.
    c. La mediana relativa al lado menor.

29. $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$ son, respectivamente, la altura y la bisectriz relativas a la hipotenusa $\overline{BC}$ del triángulo rectángulo ABC, con $B-D-E-C$. Calcule el perímetro del triángulo si $BE = 6$ y $EC = 8$.

30. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 60 cm y uno de los catetos 12 cm. Halle la medida de la altura relativa a la hipotenusa y la distancia del pie de esta altura al punto medio de la hipotenusa. ¿Cuál es la medida de la mediana relativa a la hipotenusa?

Módulo 23

Relaciones métricas en la circunferencia

Claudio Ptolomeo

(c. 100-c. 170 d.C.). AstrÛnomo, matem•-tico y geÛgrafo egipcio nacido en Tolemaida Hermia (Alto Egipto).

Contenidos del módulo

23.1 Relaciones métricas en el círculo
23.2 Relaciones métricas en polígonos regulares

Objetivos del módulo

1. Definir potencia de un punto respecto a una circunferencia.
2. Establecer relaciones entre los segmentos determinados por rectas secantes o tangentes.
3. Definir eje radical y centro radical.
4. Demostrar los teoremas de Ptolomeo.
5. Dividir un segmento en media y extrema razón.
6. Expresar la apotema de un polígono regular en función del lado.
7. Hallar el lado (ℓ_{2n}) de un polígono regular en función del lado (ℓ_n) de otro polígono con la mitad el número de lados.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es potencia de un punto respecto a una circunferencia?
2. ¿Qué relación hay entre los segmentos determinados por secantes a una circunferencia?
3. ¿Cómo se relaciona la potencia con el radio del círculo?
4. ¿Qué es el eje radical?
5. ¿Qué propiedad tiene todo triángulo inscrito en una circunferencia?
6. ¿Qué propiedad tienen las cuerdas en una circunferencia?
7. ¿Qué relaciones adicionales se pueden establecer entre los lados de un triángulo y la bisectriz?
8. ¿Cuáles son los teoremas de Ptolomeo?
9. ¿Qué es el segmento áureo?
10. ¿Qué es la apotema de un polígono regular y cómo se halla?
11. ¿Qué relaciones puede haber entre los lados de polígonos regulares?

Vea el mÛdulo 23 del programa de televisiÛn *GeometrÌa Euclidiana*

Introducción

Para establecer una relación entre la potencia de un punto a una circunferencia y el radio de la misma, este módulo empieza analizando las relaciones que se pueden establecer entre los segmentos determinados por dos rectas secantes a una circunferencia y que se cortan en un punto y poder luego presentar el eje radical. Se presentan los teoremas de Ptolomeo, en los que se analizan algunas propiedades de un cuadrilátero inscriptible, y se presenta además el segmento áureo. Se termina el módulo estableciendo relaciones entre los lados de polígonos regulares inscritos.

23.1 Relaciones métricas en el cÌrculo

Definición 23.1.1

Sea ℓ una recta secante a una circunferencia de centro O y radio r que la corta en los puntos A y B; sea además P un punto de la recta pero exterior a la circunferencia (figura 23.1). El segmento PB se llama segmento secante y PA se llama segmento exterior del segmento secante.

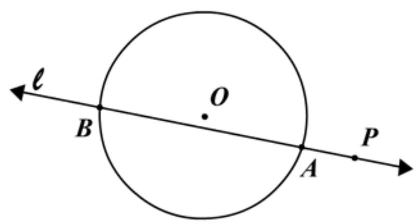


Figura 23.1

Definición 23.1.2

Potencia de un punto con respecto a una circunferencia es el producto constante de las medidas de los segmentos de una secante trazada desde el punto, comprendidos entre dicho punto y las intersecciones de la secante con la circunferencia (figura 23.2).

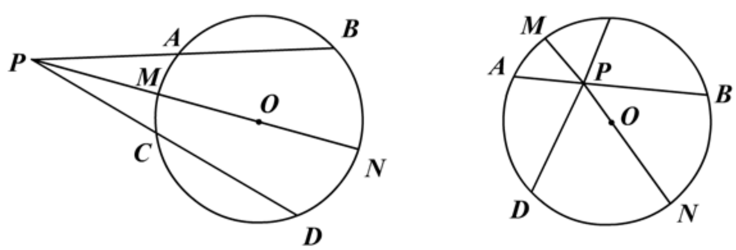


Figura 23.2

En la figura 23.2, la potencia de P con respecto a la circunferencia es:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PM \cdot PN = k$$

Teorema 23.1.1

Si por un punto se trazan rectas secantes a una circunferencia, el producto de las medidas de un segmento secante por su segmento externo es igual al producto de las medidas del otro segmento secante por su segmento externo (figura 23.3).

Claudio Ptolomeo

Para su uso como astrónomo inventó una trigonometría, tan completa, que sobrevivió todo el periodo de la Edad Media. A partir de su teorema «*La suma de los productos de los lados opuestos de un cuadrilátero cíclico es igual al producto de las diagonales*» logró desarrollar la siguiente expresión trigonométrica: sen $(\alpha \pm \beta)$ = sen α cos β ± sen β cos α .

Ptolomeo expuso su doctrina en los trece libros de su «Gran composición matemá- tica». Para representar la superficie esférica del globo sobre una superficie plana, creó un sistema de proyecciones: los paralelos son círculos con el centro en el polo norte; los meridianos, líneas rectas que convergen en el polo.

También, entre las obras de Ptolomeo se encuentran, entre otras, las siguientes: *Hipótesis planetaria*, *Las fases astronómicas*, *Analemna*, *Planisferio*, *Tetrabiblon*, *Óptica*, *Geografía* y, por supuesto, la más famosa, *Almagesto*.

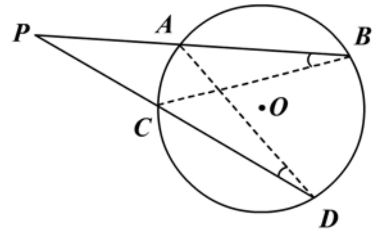


Figura 23.3

Hipótesis: $\overline{PAB}$ y $\overline{PCD}$ secantes a la $C(0,r)$

Tesis: $PB \cdot PA = PD \cdot PC$

Demostración

Trazamos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$.

Los ángulos en D y en B subtienden el arco AC, luego son congruentes.

$\Delta PBC \sim \Delta PDA$ por A-A. Por tanto:

$$\frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PA} \quad \Rightarrow \quad PB \cdot PA = PD \cdot PC$$

Teorema 23.1.2

Si dos cuerdas se intersecan en un punto interior de una circunferencia, entonces el producto de las medidas de los segmentos determinados en una de ellas es igual al producto de las medidas de los otros dos segmentos determinadas en la otra secante (figura 23.4).

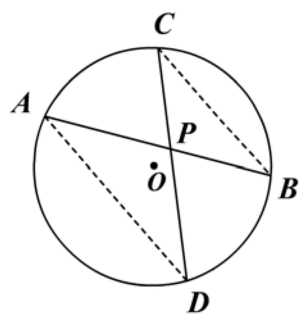


Figura 23.4

Hipótesis: $\overline{APB}$, $\overline{CPD}$ cuerdas de $C(O,r)$

Tesis: $PB \cdot PA = PC \cdot PD$

Demostración

Trazamos $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$.

$\Delta APD \sim \Delta CPB$ por A-A, $\hat{D} \cong \hat{B}$, $A\hat{P}D \cong C\hat{P}B$. Por tanto:

$$\frac{AP}{CP} = \frac{PD}{PB} \quad \Rightarrow \quad PB \cdot PA = PC \cdot PD$$

Los teoremas 23.1.1 y 23.1.2 nos muestran que la potencia de un punto con respecto a la circunferencia sólo depende del punto y de la circunferencia y no de la secante.

Teorema 23.1.3: De la potencia

La potencia de un punto con respecto a una circunferencia es igual a la diferencia entre el cuadrado de su distancia al centro de la circunferencia y el cuadrado del radio (figura 23.5).

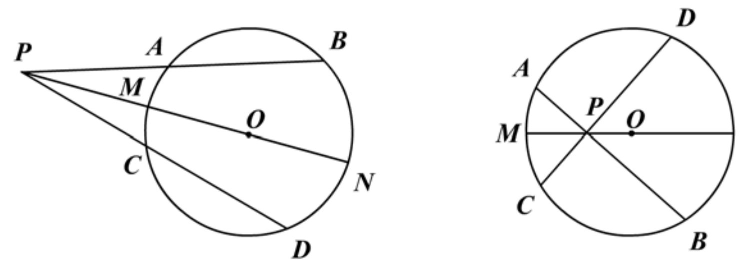


Figura 23.5

Hipótesis: $\overline{PAB}$, $\overline{PCD}$ y $\overline{PMON}$ secantes

$PD \cdot PC = PB \cdot PA = PN \cdot PM$

$PO = d$; $OM = r$

Tesis: Potencia $= d^2 - r^2 = PM \cdot PN$

Demostración

Como las secantes trazadas son arbitrarias entonces podemos elegir como una de ellas la secante que pasa por el centro de la circunferencia. Si designamos por d la distancia del punto al centro y por r el radio, obtenemos:

$$PM \cdot PN = (d - r) \cdot (d + r) = \text{potencia}$$

$$\therefore \quad \text{potencia} = d^2 - r^2 = PM \cdot PN$$

Del teorema de la potencia podemos deducir:

a. Si el punto P es exterior a la circunferencia (figura 23.5), $d > r$ y $d^2 > r^2$, luego $d^2 - r^2 > 0$ y la potencia es positiva.

b. Si el punto P está sobre la circunferencia, $d = r$ y $d^2 - r^2 = 0$ y la potencia es nula.

c. Si el punto P es interior a la circunferencia (figura 23.5 derecha), $d < r$ y $d^2 - r^2 < 0$ y la potencia es negativa.

Teorema 23.1.4

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante, la medida del segmento tangente es media proporcional entre todo el segmento secante y su segmento externo (figura 23.6).

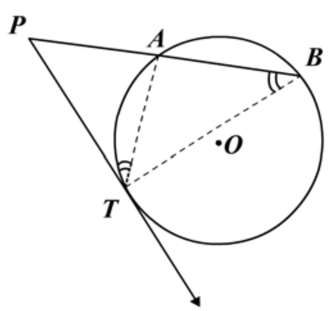


Figura 23.6

Hipótesis: $\overrightarrow{PT}$ tangente a $C(O,r)$

$\overline{PAB}$ secante a $C(O,r)$

Tesis: $PT^2 = PB \cdot PA$

Demostración

Trazamos $\overline{BT}$ y $\overline{AT}$.

$\Delta PBT \sim \Delta PTA$ por A-A, $P\hat{T}A \cong \hat{B}$, $\hat{P}$ común. Por tanto:

$$\frac{PB}{PT} = \frac{PT}{PA} \quad \Rightarrow \quad PT^2 = PA \cdot PB$$

Corolario 23.1.1
La potencia de un punto exterior a una circunferencia es igual al cuadrado del segmento tangente trazado desde el mismo punto:

Potencia $= PA \cdot PB = PT^2$

Definición 23.1.3

Eje radical de dos circunferencias es el conjunto de puntos que tienen igual potencia con respecto a dichas circunferencias.

También el eje radical se puede definir como el conjunto de puntos desde los cuales se pueden trazar a dos circunferencias dos pares de tangentes congruentes (figura 23.7).

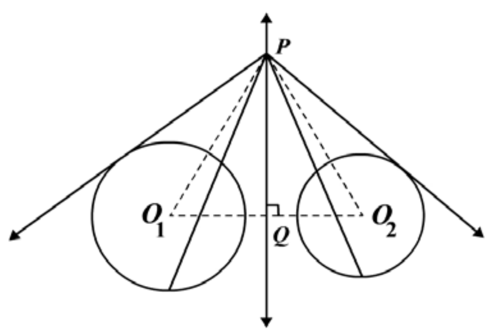


Figura 23.7

Notas:

1. El eje radical es perpendicular a la línea de centros de las circunferencias.

   $\overleftrightarrow{PQ}$ es el eje radical.
2. El eje radical de dos circunferencias congruentes es la tangente común en el punto de tangencia.

3. El eje radical de dos circunferencias secantes es la cuerda común.

Teorema 23.1.5: Del triángulo inscrito

En todo triángulo inscrito en una circunferncia el producto de las medidas de dos lados es igual al producto de la medida de la altura relativa al tercer lado y la medida del diámetro de la circunferencia circunscrita (figura 23.8).

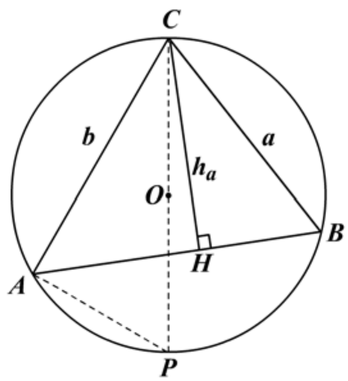


Figura 23.8

Hipótesis: $\triangle ABC$ inscrito en $C(O, r)$

$AC = b$; $BC = a$

$\overline{CH} \perp \overline{AB}$; $CH = h_c$: altura

Tesis: $ab = h_c \cdot d$

Demostración

Trazamos la cuerda diametral COP y unimos P con A; el ΔCPA es rectángulo y tiene con el ΔCBH el ángulo agudo (P y B) congruente, luego son semejantes y tenemos:

$$\frac{CP}{CB} = \frac{CA}{CH} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{a} = \frac{b}{h_c} \quad \Rightarrow \quad ab = h_c \cdot d$$

Nota: sabemos que el diámetro $d = 2R$ y

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Podemos entonces calcular el radio del círculo circunscrito en función de los lados, así:

$$ab = 2 \cdot R \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Por tanto $R = \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$,

donde p es el semiperímetro.

Teorema 23.1.6

Todo segmento de recta perpendicular trazado desde un punto de una circunferencia al diámetro de la misma es media proporcional entre los dos segmentos que determina sobre el diámetro (figura 23.9).

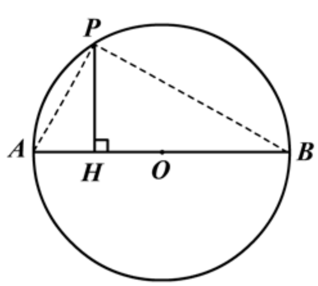


Figura 23.9

Hipótesis: $\overline{AOB}$ cuerda diametral del círculo O

$P \in$ a la circunferencia

$\overline{PH} \perp \overline{AB}$

Tesis: $PH^2 = HA \cdot HB$

Demostración

Trazamos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$. El ΔAPB es rectángulo en P y $\overline{PH}$ es la altura relativa a la hipotenusa AB. Por el corolario 22.1.1, tenemos que $PH^2 = HA \cdot HB$.

Teorema 23.1.7

Toda cuerda trazada por el extremo de una cuerda diametral es media proporcional entre su proyección sobre el diámetro y el diámetro entero (figura 23.10).

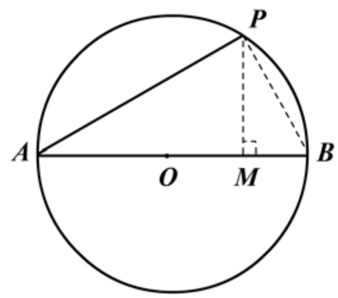


Figura 23.10

Hipótesis: $\overline{AOB}$ cuerda diametral del círculo

$\overline{AP}$ cuerda cualquiera

Tesis: $AP^2 = AB \cdot AM$

Demostración

Trazamos $\overline{PB}$ y $\overline{PM} \perp \overline{AOB}$. La recta $\overline{AM}$ es la proyección de $\overline{AP}$ sobre $\overline{AB}$; siendo el ΔAPB rectángulo y por el corolario 22.1.2, concluimos que $AP^2 = AM \cdot AB.$

Teorema 23.1.8

El producto de las medidas de dos lados de un triángulo es igual al producto de las medidas de los segmentos determinados sobre el tercer lado por la bisectriz interior, más el cuadrado de la medida de esta bisectriz (figura 23.11).

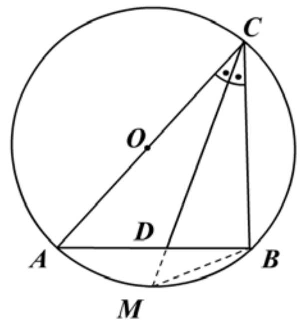


Figura 23.11

Hipótesis: ΔABC, $\overline{CD}$ bisectriz de $\hat{C}$

Tesis: $CA \cdot CB = AD \cdot DB + CD^2$

Demostración

La prolongación de la bisectriz $\overline{CD}$ corta a la circunferencia circunscrita en el punto M. Trazamos $\overline{MB}$.

$C\hat{A}B \cong C\hat{M}B$ porque subtienden el arco CB

$A\hat{C}D \cong D\hat{C}B$ por ser $\overline{CD}$ bisectriz

$\Delta ACD \sim \Delta MCB$ por A-A, luego:

$$\frac{AC}{MC} = \frac{AD}{MB} = \frac{CD}{CB} \quad \Rightarrow \quad AC \cdot CB = CD \cdot MC$$

$$AC \cdot CB = CD \cdot (CD + DM)$$

$$AC \cdot CB = CD^2 + CD \cdot DM \qquad (1)$$

Por el teorema 23.1.1 (de las secantes):

$$CD \cdot DM = AD \cdot DB \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1): $AC \cdot CB = CD^2 + AD \cdot DB$

Teorema 23.1.9: Teorema N□ 1 de Ptolomeo

En todo cuadrilátero inscrito el producto de las medidas de las diagonales es igual a la suma de los productos de las medidas de los lados opuestos (figura 23.12).

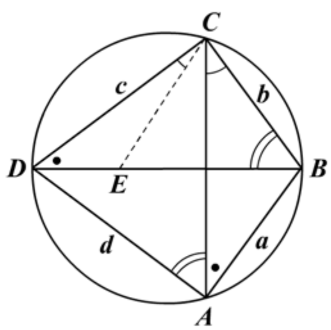


Figura 23.12

Hipótesis: cuadrilátero $ABCD$, inscrito en el círculo

$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales

Tesis: $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$

$AC \cdot BD = a \cdot c + b \cdot d$

Demostración

Construimos el $D\hat{C}E \cong B\hat{C}A$; $C\hat{D}E \sim C\hat{A}B$ porque subtiende el mismo arco CB.

$\Delta CDE \sim \Delta CAB$ por A-A, luego:

$$\frac{CD}{CA} = \frac{DE}{AB} \quad \Rightarrow \quad CA \cdot DE = CD \cdot AB \qquad (1)$$

Ahora, $D\hat{A}C \cong C\hat{B}D$ porque subtienden el arco DC.

$D\widehat{C}A \cong B\widehat{C}E$ por adición de ángulos

Luego $\Delta ACD \sim \Delta BCE$; por tanto:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BE} \quad \Rightarrow \quad AC \cdot BE = BC \cdot AD \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2) obtenemos:

$$CA \cdot DE + CA \cdot BE = CD \cdot AB + BC \cdot AD$$

$$CA(DE + EB) = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

$$\therefore \; CA \cdot DB = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

$$CA \cdot BD = a \cdot c + d \cdot b$$

Teorema 23.1.10: Teorema N□ 2 de Ptolomeo

Las medidas de las diagonales de un cuadrilátero inscrito son entre sí como la suma de los productos de las medidas de los lados que parten de sus extremos (figura 23.13).

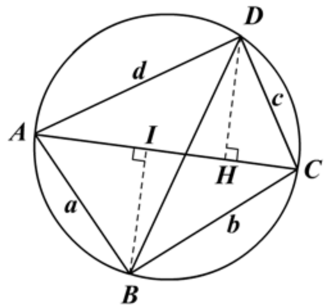


Figura 23.13

Hipótesis: cuadrilátero $ABCD$ inscrito en el círculo

$AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$

$\overline{DH} \perp \overline{AC}$, $\overline{BI} \perp \overline{AC}$

Tesis: $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{ad+bc}{ab+cd}$

Demostración

Por el teorema del triángulo inscrito (teorema 23.1.5) tenemos:

$$d \cdot c = DH \cdot 2R \quad \Rightarrow \quad d \cdot c \cdot AC = \frac{4R \cdot AC \cdot DH}{2} \qquad (1)$$

$$a \cdot b = BI \cdot 2R \quad \Rightarrow \quad a \cdot b \cdot AC = \frac{4R \cdot AC \cdot BI}{2} \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2) obtenemos:

$$AC(d \cdot c + a \cdot b) = 4R\frac{(AC)(DH+BI)}{2} = 4R \cdot \text{Área } ABCD \qquad (3)$$

Si consideramos los triángulos BAD y BCD y el teorema 23.1.5, si se trazan las alturas obtenemos:

$$BD(ad+bc) = 4R \cdot \text{ Área } ABCD \qquad (4)$$

De (3) y (4): $AC(dc+ab) = BD(ad+bc)$

$$\therefore \quad \frac{AC}{BD} = \frac{ad+bc}{ab+dc}$$

Nota: se ha utilizado el concepto de área que estudiaremos en el próximo capítulo.

Corolario 23.1.2

Si a, b, c, d son los cuatro lados de un cuadrilátero inscriptible, entonces la diagonal

$AC = \sqrt{\dfrac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$. Según los teoremas 23.1.9 y 23.1.10 tenemos:

$$AC \cdot BD = ac + db \qquad (1)$$

$$\frac{AC}{BD} = \frac{ad+bc}{ab+dc} \qquad (2)$$

Multiplicando (1) y (2) obtenemos:

$$AC^2 = \frac{ad+bc}{ab+dc}(ac+bd)$$

$$\therefore \quad AC = \sqrt{\frac{ad+bc}{ab+cd}(ac+bd)}$$

Ejemplo 23.1.1

En la figura 23.14:

$\overline{PAB}$ secante

$\overline{PCD}$ secante

$PA = x$, $PB = 8$, $PC = 3$, $CD = 9$

Hallar x.

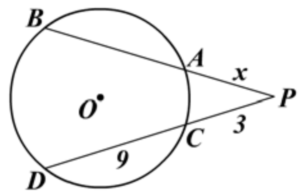


Figura 23.14

Solución

Por el teorema de las secantes

$$PB \cdot PA = PD \cdot PC$$

$$8 \cdot x = (9+3)3 \quad \Rightarrow \quad 8x = 36 \quad \Rightarrow \quad x = 4,5$$

Ejemplo 23.1.2

En la figura 23.15:

$\overrightarrow{PT}$ es tangente

$PT = 10$, $PA = x$, $AB = 21$

Determinar x.

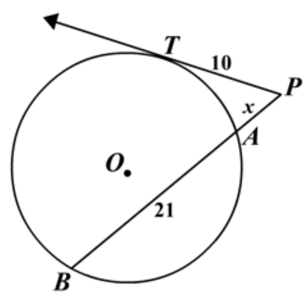


Figura 23.15

Solución

Por el teorema de la potencia:

$$PA \cdot PB = PT^2$$

$$(x)\cdot\left(21+x\right) = (10)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 21x - 100 = 0$$

$$(x+25)\cdot\left(x-4\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

Ejemplo 23.1.3

En la figura 23.16:

$PC = 8$, $PD = 12$, $AP = x$, $AB = 20$

Hallar x.

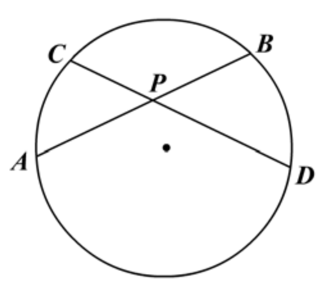


Figura 23.16

Solución

$$PC \cdot PD = PA \cdot PB$$
$$8 \cdot 12 = x \cdot (20 - x)$$
$$x^2 - 20x + 96 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-12)(x-8) = 0$$
$$\Rightarrow \; x_1 = 12 \quad \wedge \quad x_2 = 8$$

Ejemplo 23.1.4

Demostrar que el producto de las medidas de dos lados de un triángulo es igual al producto de las medidas de los segmentos determinados sobre el tercer lado por la bisectriz exterior, menos el cuadrado de la medida de esta bisectriz (figura 23.17).

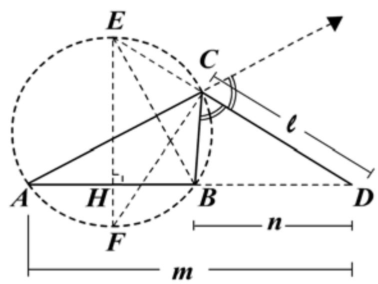


Figura 23.17

Hipótesis: ΔABC cualquiera

$\overline{CD}$ bisectriz exterior

$CD = \ell$, $BD = n$,

$AD = m$, $AC = b$,

$CB = a$.

Tesis: $ab = mn - \ell^2$

Demostración

Inscribimos el ΔABC en el círculo *O* y trazamos $\overline{EOF} \perp \overline{AB}$; unimos *E* con *C*, *F* con *C*.

$C\hat{A}B \cong C\hat{E}B$, porque subtienden el mismo arco. (1)

$E\hat{F}C \cong C\hat{B}E$, porque subtienden el mismo arco.

$A\hat{D}C \cong E\hat{F}C$, por tener lados perpendiculares.

$C\hat{B}E \cong A\hat{D}C$, por transitividad. (2)

Entonces $\Delta CDA \sim \Delta CBE$ por (A-A) de (1) y (2)

$$\frac{CD}{CB} = \frac{CA}{CE} \quad \Rightarrow \quad CA \cdot CB = CD \cdot CE$$
$$= CD \cdot (DE - CD)$$
$$CA \cdot CB = CD \cdot DE - CD^2 \qquad (3)$$

Del teorema 23.1.1: $DE \cdot CD = AD \cdot BD$ (4)

Sustituyendo la hipótesis y (4) en (3), concluimos que $ab = mn - \ell^2$.

Definición 23.1.4: Segmento áureo

Un segmento está dividido en media y extrema razón cuando el segmento mayor es media proporcional entre el segmento menor y el segmento entero (figura 23.18).

Figura 23.18

$AC^2 = CB \cdot AB$

Para comprender mejor la definición resolvamos el siguiente problema.

Ejemplo 23.1.5

a. Dividir un segmento en extrema razón.
b. Calcular el segmento mayor de un segmento dividido en media y extrema razón (figura 23.19).

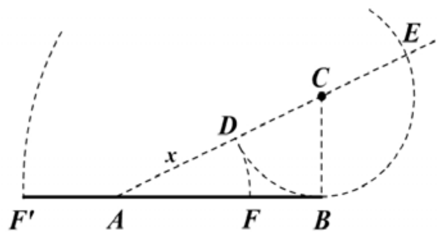


Figura 23.19

Solución

Por el extremo B de $\overline{AB}$ levantamos $\overline{BC} \perp \overline{AB}$, unimos A con C y trazamos la circunferencia de centro C y radio $\frac{AB}{2}$, la cual corta a $\overline{AC}$ en D y su prolongación en E; con centro en A y radio AD trazamos un arco que corta a $\overline{AB}$ en F.

Veamos que F divide a $\overline{AB}$ en extrema y media razón.

Por el teorema 23.1.4 : $AE \cdot AD = AB^2$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD} \quad \Rightarrow \frac{AE - AB}{AB} = \frac{AB - AD}{AD} \qquad (1)$$

pero $DE = 2BC = AB$; $AE - AB = AE - AC = AE - DE = AD = AF$ (2)

y por tanto $AB - AD = AF$ (3)

$$AB - AD = AB - AF = FB \qquad (4)$$

Reemplazando (2), (3) y (4) en (1) obtenemos:

$$\frac{AF}{AB} = \frac{FB}{AF} \quad \therefore \quad AF^2 = AB \cdot FB$$

b. Ahora bien: si $AB = a$, $AF = x$, y $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$(AD + DC)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = (x + \frac{a}{2})^2$$

$$\Rightarrow (x + \frac{a}{2}) = \frac{a}{2}\sqrt{5} \qquad \therefore \qquad x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

23.2 Relaciones métricas en polígonos regulares

Teorema 23.2.1

Una circunferencia se divide en n arcos congruentes y se obtiene un polígono regular de n lados:

a. Si unimos los puntos consecutivos de división (figura 23.20) o
b. Si trazamos tangentes a la circunferencia por los n puntos de división (figura 23.20).

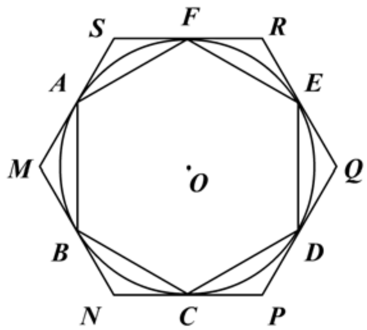


Figura 23.20

Hipótesis: circunferencia O

$n = 6$, $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC} \cong \cdots \cong \overset{\frown}{FA}$

$\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{SM}$ tangentes a la circunferencia en $A, B, \ldots, F$.

Tesis: $ABCDEF$, $MNPQRS$ son polígonos regulares

Demostración

a. $ABCDEF$ es polígono regular.

En efecto, como los arcos $\overset{\frown}{AB}, \cdots, \overset{\frown}{FA}$ son congruentes, las cuerdas son congruentes $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FA}$ y los ángulos $ABC, BCD, \cdots, FAB$ son congruentes porque los arcos subtendidos son congruentes, luego $ABCDEF$ es un polígono regular (equilátero y equiángulo).

b. $MNPQRS$ es un polígono regular.

En efecto, $M\hat{B}A \cong B\hat{A}M \cong N\hat{B}C \cong \cdots \cong S\hat{A}F$ por ser ángulos semiinscritos que subtienden arcos congruentes (hipótesis).

c. De la parte *a* sabemos que:

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FA}$

Luego $\Delta AMB \cong \Delta BNC \cong \cdots \cong \Delta SAF$ (A-L-A) y

$\overline{MN} \cong \overline{NP} \cong \overline{PQ} \cong \overline{QR} \cong \overline{RS} \cong \overline{SM}$.

$\therefore$ $MNPQRS$ es un polígono regular.

De la demostración anterior podemos concluir además que todo polígono regular se puede inscribir o circunscribir a una circunferencia.

El centro de un polígono regular es el centro común de la circunferencia inscrita y la circunferencia circunscrita a él.

El radio de un polígono regular es el radio de la circunferencia circunscrita.

La apotema de un polígono regular es el segmento de la perpendicular bajada del centro al lado.

También es válido decir que la apotema de un polígono regular es el radio de la circunferencia inscrita.

Ángulo en el centro de un polígono regular es el ángulo formado por dos radios consecutivos. La suma de los ángulos en el centro de un polígono regular vale 360°.

Ángulo interior de un polígono regular es el ángulo formado por dos lados consecutivos.

Recordemos que la suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados es $(n-2)\pi$, y si el polígono es regular, cada ángulo interior vale $\frac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n}$, es decir: «un ángulo interior de un polígono regular de *n* lados es el suplemento del ángulo central».

Teorema 23.2.2

Demostrar que la apotema a_n de un polígono regular de lado ℓ_n, inscrito en una circunferencia de centro *O* y radio *r*, está dada por (figura 23.21):

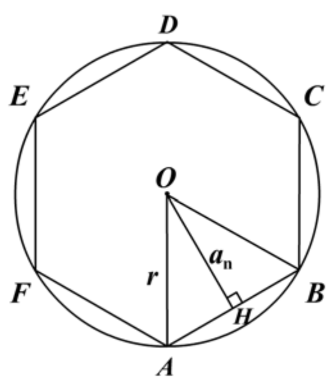


Figura 23.21

Hipótesis: $ABCDEF$ polígono regular inscrito en $C(O,r)$

$\overline{OH} \perp \overline{AB}$

$OH = a_n$: apotema

$AB = \ell_n$: lado

Tesis: $a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - \ell_n^2}$

Trazamos los segmentos radiales OA y OB. El ΔAOB es isósceles y $\overline{OH}$ es mediana, luego $HB = \frac{1}{2}\ell_n$. Por Pitágoras en él, tenemos:

$$a_n = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}\ell_n\right)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 - \frac{\ell_n^2}{4}} = \sqrt{\frac{4r^2 - \ell_n^2}{4}}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - \ell_n^2}$$

Teorema 23.2.3

Sea ℓ_n el lado de un polígono regular inscrito en una $C(O,r)$. Si ℓ_{2n} es el lado de un polígono regular de doble número de lados inscrito en la misma circunferencia, entonces (figura 23.22):

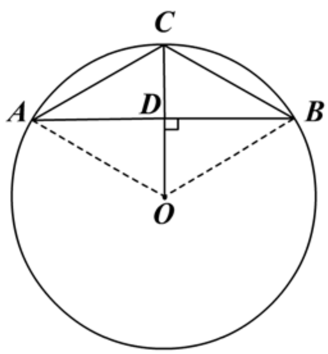


Figura 23.22

Hipótesis: $AB = \ell_n$ lado del polígono regular inscrito (PRI) de *n* lados

$\overline{ODC} \perp \overline{AB}$

$AC = CB = \ell_{2n}$: lado del polígono regular inscrito de 2*n* lados.

Tesis: $\ell_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - \ell_n^2}}$

Demostración

Trazamos los segmentos radiales *OA* y *OB*.

$$OD = a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - \ell_n^2} \text{ por teorema 23.2.2.}$$

Por el teorema 22.2.1 en el ΔOBC

$$CB^2 = OC^2 + OB^2 - 2OC \cdot OD$$

$$\ell_{2n}{}^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot a_n$$

$$\ell_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - \ell_n^2}}$$

$$\therefore \ \ell_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - \ell_n^2}}$$

Ejemplo 23.2.1

La diferencia que hay entre el ángulo interior de un polígono regular de *n* lados con otro de $n+2$ lados es 6°. Hallar *n*.

Solución

La medida del ángulo interior de un polígono regular inscrito de *n* lados es:

$$\frac{(n-2)\pi}{n} \qquad (1)$$

La medida del ángulo interior de un polígono regular inscrito de $n+2$ lados es:

$$\frac{[(n+2)-2]\pi}{n+2} \qquad (2)$$

La diferencia está dada por $(2)-(1)$, o sea:

$$\frac{n}{n+2}\pi - \frac{(n-2)}{n}\pi = 6° = \frac{\pi}{30}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n}{n+2} - \frac{n-2}{n} = \frac{1}{30} \quad \Rightarrow \quad n^2+2n-120=0$$

Resolviendo, obtenemos $n = 10$.

Ejemplo 23.2.2

Sea ℓ_n el lado de un polígono regular inscrito en una $C(O,r)$. Hallar el lado ℓ'_n del polígono regular circunscrito semejante (figura 23.23).

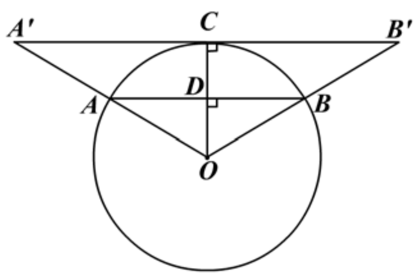


Figura 23.23

Hipótesis: $C(O,r)$

$AB = \ell_n$: lado del polígono regular inscrito en $C(O,r)$

$A'CB'$ tangente a $C(O,r)$

$A'CB' = \ell'_n$: lado del polígono regular circunscrito en $C(O,r)$

polígono regular de lado ℓ_n semejante al polígono regular de lado ℓ'_n

Tesis: Hallar ℓ'_n como $f(\ell_n)$

Solución

Trazamos los segmentos $\overline{OAA'}$ y $\overline{OBB'}$ y el segmento radial OC.

$$OD = a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2-\ell_n^2} \text{ (teorema 23.2.2).}$$

La semejanza de los polígonos nos proporciona:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OC}{OD} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell'_n}{\ell_n} = \frac{a'_n}{a_n}$$

$$\frac{\ell'_n}{\ell_n} = \frac{r}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-\ell_n^2}} \quad \Rightarrow \quad \ell'_n = \frac{2\ell_n r}{\sqrt{4r^2-\ell_n^2}}$$

Ejemplo 23.2.3

Lado del cuadrado en función del radio.

El ángulo central del cuadrado inscrito es de 90°; luego trazamos dos cuerdas diametrales perpendiculares y al unir sus extremos obtenemos el cuadrado inscrito (figura 23.24).

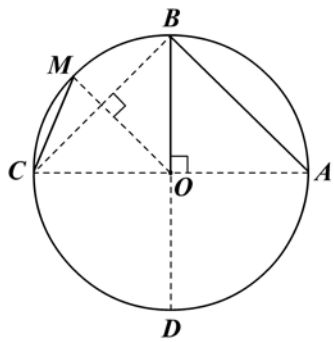


Figura 23.24

Hipótesis: $C(O, r)$

$\overline{AOB} \perp \overline{BOD}$

$AB = \ell_4$:lado del cuadrado $ABCD$

Tesis: $\ell_4 = r\sqrt{2}$

Solución

El ΔAOB es rectángulo isósceles con $OA = OB = r$.

Entonces $AB = \ell_4 = \sqrt{r^2 + r^2} \quad \therefore \quad \ell_4 = r\sqrt{2}$

La apotema $a_4 = \dfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - \ell_4^{\,2}}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - 2r^2}$$

$$\therefore \quad a_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

Ejemplo 23.2.4

Lado del octógono en función del radio.

El lado del octógono lo obtenemos al bisecar los arcos que corresponden a los lados del cuadrado inscrito (teorema 19.1.2).

En la figura 23.24, *CM* es el lado del octógono, o sea $CM = \ell_8$. Si aplicamos el teorema 23.2.3, obtenemos:

$$\ell_8 = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - \ell_4^{\,2}}}, \text{ en donde } \ell_4 = r\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - 2r^2}}$$

$$= \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \ell_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Probar que $a_8 = \dfrac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

Ejemplo 23.2.5

Lado del hexágono en función del radio (figura 23.25).

Solución

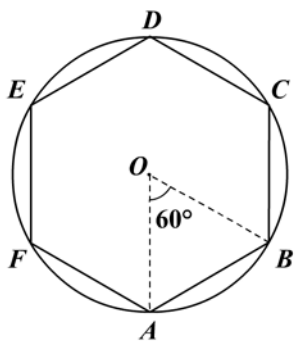


Figura 23.25

En la figura 23.25, el ángulo central del hexágono mide 60°. Como el ΔAOB es isósceles ($OA = OB = r$), entonces el ΔAOB es equilátero y obtenemos:

$$AB = \ell_6 = r = OA = OB.$$

La apotema: $a_6 = \dfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - \ell_6^2}$, en donde $\ell_6 = r$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - r^2}$$

$$\therefore \quad a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo 23.2.6

Lado del triángulo equilátero en función del radio (figura 23.26).

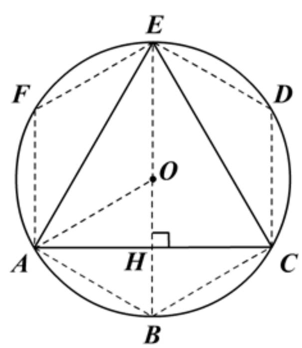


Figura 23.26

El ángulo central del triángulo equilátero mide 120° y $m(A\hat{O}E) = 120°$. Luego

$$AE = EC = AC = \ell_3, \text{ lado del triángulo equilátero.}$$

En el triángulo rectángulo *BAE* se tiene que $AE^2 = BE^2 - AB^2 = d^2 - \ell_6^2$

$$AE^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2$$

$$\therefore \quad AE = \ell_3 = r\sqrt{3}$$

La apotema $a_3 = \dfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - 3r^2} = OH$

$$\therefore \quad a_3 = \frac{r}{2}$$

Nota: la altura del triángulo equilátero inscrito en función del radio es:

$$EH = h = EO + OH = r + \frac{r}{2}$$

$$\therefore \quad h = \frac{3}{2}r$$

Ejemplo 23.2.7

Lado del decágono en función del radio (figura 23.27).

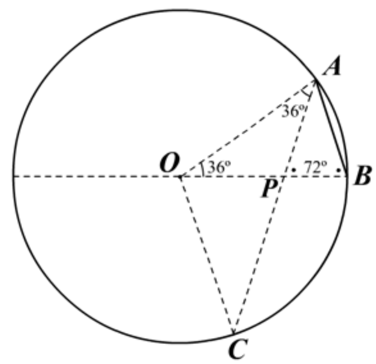


Figura 23.27

El ángulo central del decágono regular inscrito es 36° y el lado opuesto $AB = \ell_{10}$ es el lado del decágono. El ΔOAB es isósceles y $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = 72°$.

Tracemos la bisectriz $\overline{APC}$ del ángulo $O\hat{A}B$. Luego $m(O\hat{A}C) = m(O\hat{C}A) = 36°$ y por tanto $m(C\hat{O}P) = 72°$, siendo entonces $BC = \ell_5$ (¿por qué?); además $OP = PA = AB = \ell_{10}$. Ahora bien, por A-A: $\Delta OCP \sim \Delta BAP$ y

$$\frac{OC}{BA} = \frac{OP}{BP} \Rightarrow \frac{r}{\ell_{10}} = \frac{\ell_{10}}{r - \ell_{10}} \Rightarrow \ell_{10}^2 = r(r - \ell_{10}) \Rightarrow \ell_{10}^2 + r\ell_{10} - r^2 = 0$$

Resolviendo para ℓ_{10} obtenemos:

$$\ell_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

Probar que $a_{10} = \dfrac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

Nota: el lado del decágono es el segmento radial dividido en media y extrema razón.
En efecto, por el teorema de la bisectriz:

$$\frac{OA}{OP}=\frac{AB}{PB} \quad \Rightarrow \quad \frac{OB}{OP}=\frac{OP}{PB} \qquad \left(OA=OB=r,\ \ AB=OP=\ell_{10}\right)$$

$\Rightarrow \quad OP^2=OB\cdot PB$, luego P divide a $\overline{OB}$ en media y extrema razón $\left(OP>PB\right)$ (definición 23.1.4 y ejemplo 23.1.5)

Ejemplo 23.2.8

Lado del pentágono regular inscrito en función del radio (figura 23.28).

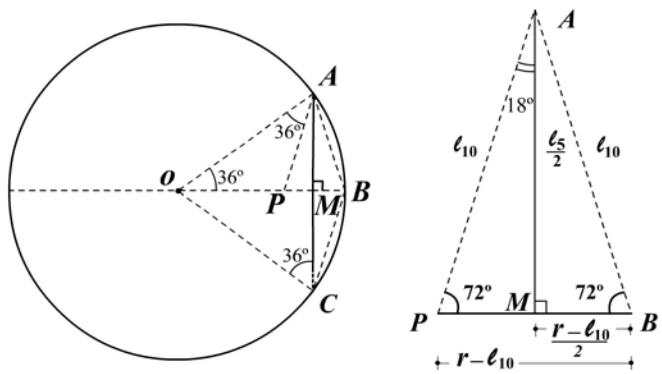


Figura 23.28

Solución

Como $AB=BC=\ell_{10}$, entonces $AC=\ell_5$ porque $\Delta OAB\cong\Delta OCB$ (L-L-L). Por tanto $m(C\hat{O}B)=36°=m(A\hat{O}B)$ y $m(A\hat{O}C)=72°$.

Por el teorema 19.1.6: $AM=MC=\frac{\ell_5}{2}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras en el ΔAMB:

$$\left(\frac{\ell_5}{2}\right)^2=\ell_{10}^2-\left(\frac{r-\ell_{10}}{2}\right)^2$$

$$\ell_5^2=4\ell_{10}^2-r^2+2r\ell_{10}-\ell_{10}^2$$

$$\ell_5^2=3\frac{r^2}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)^2-r^2+2r\cdot\frac{r}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

$$4\ell_5^2=3r^2\left(6-2\sqrt{5}\right)+4r^2\sqrt{5}-8r^2$$

$$4\ell_5^2=10r^2-2r^2\sqrt{5}$$

$$\ell_5^2=\frac{r^2\left(10-2\sqrt{5}\right)}{4}$$

$$\therefore \quad \ell_5=\frac{r}{2}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$$

Probar que la apotema del pentágono regular inscrito $a_5=\frac{r}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$.

Ejercicios

Módulo 23

1. En las siguientes figuras (1 a 8) halle el(los) valor(es) de la(s) variable(s) indicada(s).

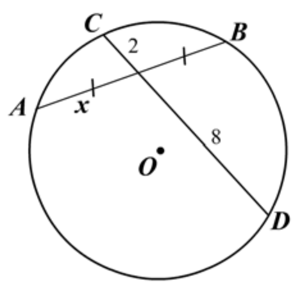


Figura 1

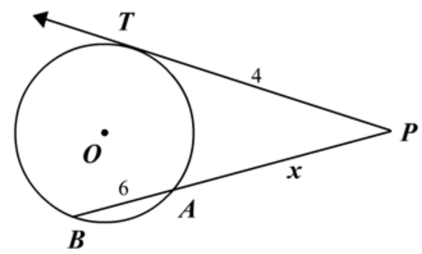


Figura 2

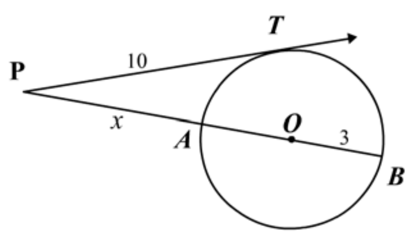


Figura 3

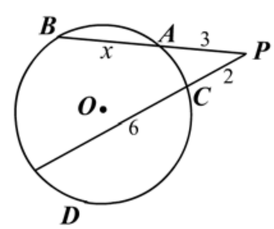


Figura 4

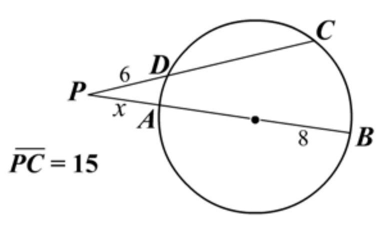


Figura 5

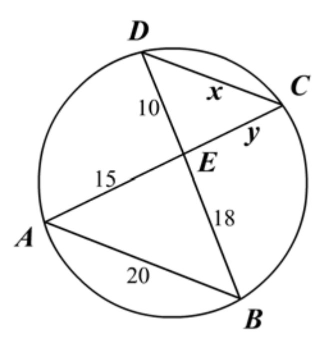


Figura 6

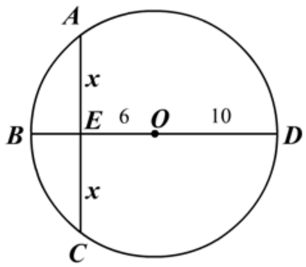


Figura 7

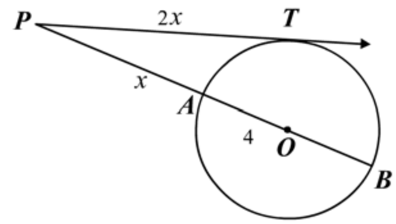


Figura 8

2. Si en la figura 9 $OM = 8$, $NQ = 3$ y $MQ = 9$, halle $MP = z$.
3. Si en la figura 9 $MQ = 8$, $PQ = 5$ y $QN = 4$, halle el radio.
4. Si en la figura 9 $MQ = 10$, $PQ = 5$ y $QN = 4$, halle OQ.

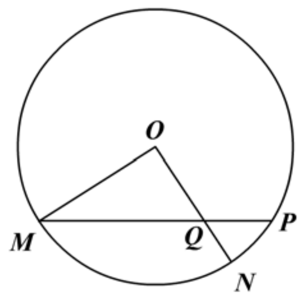


Figura 9

5. En la figura 10 $\overline{AC}$ es bisectriz del ángulo BAD. Además, $AB = 24$, $AD = 30$ y $BE = 16$. Halle ED, BC y CE.

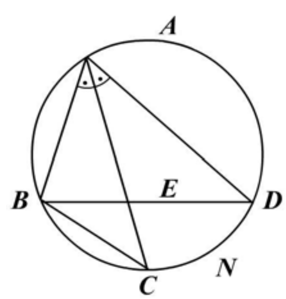


Figura 10

6. En un círculo de centro O, $\overline{AOB}$ es cuerda diametral, $\overline{CBD}$ es tangente a la circunferencia y $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ cortan a la circunferencia en F y E, respectivamente. Demuestre que $AC \cdot AF = AD \cdot AE$.

7. $\overline{AOB}$ es una cuerda diametral de un círculo O, $\overline{DE}$ es perpendicular a $\overline{AOB}$ prolongado ($A-O-B-D$) y $\overline{AE}$ corta a la circunferencia en C. Demuestre que $AD \cdot AB = AE \cdot AC$.

8. ABC es un triángulo inscrito en un círculo O de radio 10. Si $AC = 13$, $CB = 8$ y $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, halle CD.

9. AB es el diámetro de un círculo O. Se da $A-O-B-M$, se trazan $\overline{MN}$ y $\overline{MP}$ tangentes a la circunferencia y la cuerda NP corta a $\overline{AB}$ en C. Demuestre que $CA : CB = MA : MB$.

10. Desde un punto exterior P se trazan a una circunferencia el segmento tangente PA y la secante $\overline{PBC}$, tales que $\overline{CPA}$ es una cuerda diametral. Si $CB = 6$ y $PB = 8$, halle PA, AC y AB.

11. Una cuerda de longitud 16 tiene sobre la cuerda diametral trazada por uno de sus extremos una proyección cuya medida es 6. Halle el radio de la circunferencia.

12. Los radios de dos circunferencias concéntricas son 28 y 16. Halle la longitud de la cuerda de la circunferencia mayor que sea tangente a la menor.

13. Una cuerda AB que mide 24 dista 10 del centro O de una circunferencia. Si C es el punto medio del arco AB, halle la medida de la cuerda AC.

14. La cuerda diametral AB de una circunferencia mide 20 y se prolonga una longitud $BP = 8$. Si la secante $\overline{PCD}$ dista del centro O, $OF = 5$, halle $PC = x$.

15. ABC es un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia. Por A se traza la secante ADP con D sobre la circunferencia y P en la prolongación de BC. Demuestre que $AB^2 = AD \cdot AE$.

16. La diferencia entre la medida de un ángulo interior de un polígono regular de n lados y la medida del ángulo interior de otro polígono regular de $(n-1)$ lados es 4°. Halle n.

17. ABC es un triángulo equilátero inscrito y la altura $\overline{AH}$ corta el arco BC en D. Demuestre que $OBDC$ es un rombo.

18. Halle el lado del triángulo equilátero circunscrito a un círculo en función del radio. Si el radio es 15, ¿cuánto mide el lado?

19. Demuestre que en un pentágono regular inscrito la apotema y el radio al vértice del pentágono son colineales.

20. $ABCDE$ es un pentágono regular inscrito en una circunferencia O. La prolongación de $\overline{ED}$ corta la prolongación de $\overline{BC}$ en P y a una tangente por A en T. Halle $m(\hat{P})$ y $m(\hat{T})$.

21. $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos cuerdas diametrales perpendiculares de la circunferencia $C(O,r)$. Con centro en el punto medio *M* de $\overline{OA}$ y con radio *OC* se traza un arco de circunferencia que corta a $\overline{OB}$ en *P*. Demuestre que la $m(\overline{CP})$ es el lado de un pentágono regular. Verifique la relación $\ell_5^2 = \ell_6^2 + \ell_{10}^2$.

22. Calcule en función del radio el lado del triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono circunscritos $(\ell'_3,\ \ell'_4,\ \ell'_5)$ y semejantes a sus respectivos inscritos.

23. *ABCDEF* es un hexágono regular inscrito en una circunferencia, y *K, L, M, N, P* y *Q* son los puntos medios de sus lados. Demuestre que *KLMNPQ* es un hexágono regular y la medida de su lado es $\dfrac{r\sqrt{3}}{3}$.

24. *ABCDE* es un pentágono regular inscrito de lado *a*, y $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ se cortan en *F*.

    a. Demuestre que $FA = FC$ y $FD = FE$.

    b. Demuestre que $AF^2 = AD \cdot FD$ (*F* divide a $\overline{AD}$ en media y extrema razón).

    c. Si $FC = FA = x$ y $FD = FE = y$, pruebe que $x = a$ y que $y = \dfrac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$.

25. Se divide una circunferencia de radio *r* en seis partes iguales y se unen los puntos de tal forma que resultan dos triángulos equiláteros cuyos lados al cortarse forman un hexágono regular (demuéstrelo). Halle la medida del lado de este hexágono.

Autoevaluación

Capítulo 6
Relaciones métricas

Módulos 20 al 23

1. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

- Toda proporción tiene cuatro términos diferentes.
- Una proporción no puede tener dos extremos iguales.
- La media proporcional entre dos cantidades es la media geométrica entre ellas.
- Si dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes congruentes, entonces sus lados correspondientes son congruentes.
- Dos triángulos isósceles son semejantes si tienen un ángulo congruente.
- Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo congruente.
- Si una recta divide proporcionalmente a dos lados (o a sus prolongaciones) de un triángulo, es paralela al tercer lado.
- Los polígonos congruentes son semejantes.
- Si dos cuerdas se cortan en el interior de una circunferencia, la suma de las medidas de los segmentos de una cuerda es igual a la suma de las medidas de los segmentos de la otra.
- Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante, entonces el segmento tangente es igual a la diferencia entre toda la secante y el segmento externo.
- La distancia más corta desde un punto a una circunferencia es a lo largo de la recta que une el punto con el centro.
- La potencia de un punto respecto a una circunferencia es un segmento.
- El polígono equilátero inscrito en un círculo debe ser equiángulo.
- Un rectángulo circunscrito a una circunferencia es un cuadrado.
- Un trapecio inscrito en una circunferencia debe ser un trapecio isósceles.
- Todo polígono inscrito en una circunferencia es regular.
- Todo polígono circunscrito a una circunferencia es regular
- El radio de la circunferencia inscrita en un triángulo equilátero es un tercio de la medida de la altura.
- La razón entre el radio de la circunferencia inscrita y la circunferencia circunscrita a un mismo triángulo equilátero es igual a 2.
- Dos cuerdas congruentes que se cortan en una circunferencia son las diagonales de un trapecio isósceles.

2. En el trapecio *ABCD* de la figura 1 halle el valor de:

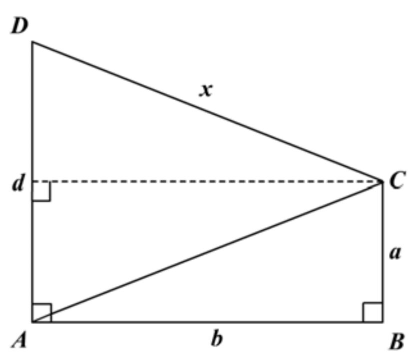


Figura 1

a. x, si $a = 11$, $b = 3$, $d = 51$.

b. a, si $x = 20$, $b = 12$, $d = 36$.

c. y, si $a = 20$, $x = 17$, $d = 28$.

3. En la figura 2, $ABCD$ es un paralelogramo con $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, $AM = 8$, $AE = 6$, $AB = 24$ e $IH = 2HC$. Halle las medidas de los segmentos DM, AI, FM y FH.

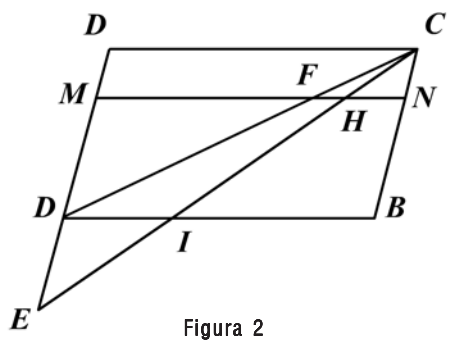


Figura 2

4. En la figura 3 el ΔABC es rectángulo en A, y $MNPQ$ es un cuadrado inscrito de lado x; $AH = h$ es la altura y $BC = a$. Demuestre que:

a. $NP^2 = BN \cdot PC$.

b. $x = \dfrac{ah}{a+h}$.

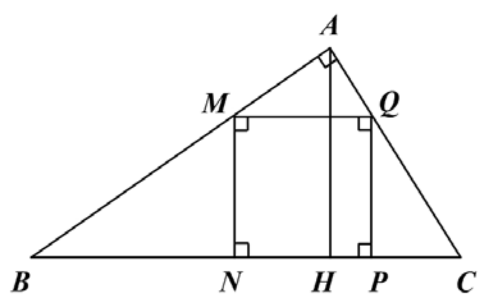


Figura 3

5. En la figura 4:

Hipótesis: ΔABC rectángulo en A

$\overline{AM}$ bisectriz interior de $\hat{A}$

$\overline{AN}$ bisectriz exterior de $\hat{A}$

$\overline{BP} \parallel \overline{AN}$; $\overline{BQ} \parallel \overline{AM}$; $AB = c$; $AC = b$

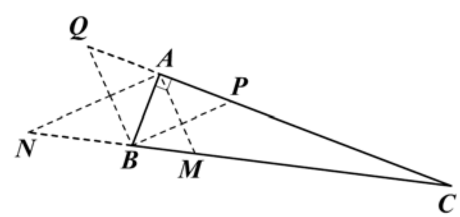


Figura 4

Tesis: $BQ = c\sqrt{2}$; $AM = \dfrac{bc\sqrt{2}}{b+c}$; $AN = \dfrac{bc\sqrt{2}}{b-c}$

6. En la figura 5:

Hipótesis: $\overline{PM} \perp \overline{PR}$; $\overline{QN} \perp \overline{PR}$; $\overline{RT} \perp \overline{PR}$

$P-Q-R$; $P-N-T$; $M-N-R$

$NQ = x$, $PM = y$, $RT = z$

Tesis: $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$

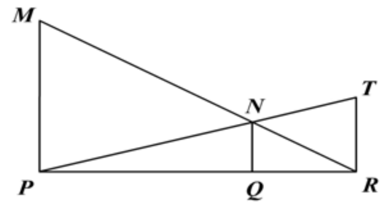


Figura 5

En el trapecio *ABCD*, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Halle, en los ejercicios 7 a 10:

7. La altura, si $BC = AD = 13$, $AB = 30$ y $BC = 20$.
8. $AD = BC$, si $DC = 20$, $AB = 30$ y $m(\hat{A}) = 45°$.
9. AD, BC y altura, si $\overline{AD} \perp \overline{DC}$, $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ y $m(\hat{B}) = 60°$.
10. AB, DC y altura, si $AD = BC = 3$, $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ y $AC = 4$.
11. Los lados de un ΔABC miden 39, 41 y 50. Halle la medida de la altura, la mediana y la bisectriz relativas al lado $AB = 50$.
12. Los lados de un ΔABC miden: $a = 30$, $b = 16$, $c = 36$. Desde el baricentro *P* se traza $\overline{PM} \perp \overline{AB}$. Halle *PM*.
13. En un ΔABC rectángulo en *A*, $\overline{CD}$ es la bisectriz de $\hat{C}$, $A-D-B$, $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ y $B-E-C$. Si $BC = 25$ y $AC = 20$, halle *DE*.
14. En un ΔABC isósceles la base mide 18 y cada lado congruente mide 24. Halle el lado del cuadrado inscrito.
15. En un rectángulo la diferencia de las medidas de dos lados es 1 y su producto es 1. Halle la medida de los lados.
16. En el triángulo rectángulo *ABC*, la hipotenusa $BC = 2a$ y $A-D-B$ con $CD = \dfrac{3}{2}a$. Halle AD y *AC*.
17. En un triángulo isósceles *ABC* de vértice *B*, $BA = a$, $AC = b$, $CD = d$ es la bisectriz de $\hat{C}$ y $AM = m$ es la mediana desde *A*. Halle *d*, *m*, *DB* y *DA*.
18. En un triángulo *PQR* son perpendiculares las medianas relativas a los lados $\overline{QR}$ y $\overline{PR}$. Si la medida de $\overline{QR}$ es *a* y la medida de $\overline{PR}$ es *b*, determine la medida de $\overline{PQ}$.
19. El lado $\overline{MN}$ de un triángulo *MNP* mide *b*. Se traza una línea recta $\overleftrightarrow{JKL}$ paralela a $\overline{MN}$ de modo que $P-J-M$ y $P-K-N$. La recta *MKQ* es la bisectriz del ángulo *PKL*. Si la medida de $\overline{JK} = c$, halle la medida de $\overline{KP}$.

20. En un triángulo ABC, O es el baricentro. Demuestre que:

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

21. Los lados diferentes de un paralelogramo miden 2 y 5, y el ángulo entre ellos es 30°. Halle la medida de las diagonales.

22. $ABCD$ es un trapecio con $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{CD}$ y M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Si $m(\hat{A}) = 60°$, $AD = DC = a$ y $AB = 3a$, halle la medida de MN y CB.

23. Las bisectrices $\overline{DM}$ y $\overline{CN}$ de los ángulos D y C del paralelogramo $ABCD$ cortan a las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ en M y N, respectivamente. Demuestre que $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{AB}$.

24. $ABCD$ es un cuadrilátero cualquiera. $\overline{DM}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y $\overline{CN}$ lo es a $\overline{AD}$, con $A-M-C$ y $B-N-D$. Demuestre que $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{AB}$.

25. Demuestre que las alturas de un triángulo cualquiera son bisectrices de los ángulos interiores del triángulo formado al unir los pies de las alturas (triángulo órtico o triángulo pedal).

26. Desde un punto P se trazan las secantes $\overline{PAB}$ y $\overline{PCD}$ tales que $\overline{COA}$ es una cuerda diametral. Si $PA = 8 = AC$ y $PC = 12$, halle $DE = x$ y $CB = y$.

27. El centro de la circunferencia O_2 está sobre la circunferencia O_1. Si $n = 6$ y $r_2 = 2$, halle la medida del segmento tangente exterior común.

28. O_1 y O_2 son dos circunferencias tangentes exteriores y $\overline{PAB}$ es una tangente exterior a O_1 y O_2 que corta la recta O_1O_2 en P. Si el ángulo AO_1P mide 60°, $R_1 = 6$ y $r_2 = 2$, halle $PB = x$, $PE = y$, $P-E-O_2-O_1$.

29. $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia O con $\overline{PAB}$ como diámetro y cuyas diagonales AC y BD se cortan en E. Además $\overline{DH} \perp \overline{AB}$, $\overline{CI} \perp \overline{AB}$ y $\overline{OM} \perp \overline{CD}$. Si $AB = 40$, $AD = 24$ y $BC = 15$, halle DH, CI, CD, AH y OM.

30. Desde el punto medio D de la base AB de un triángulo isósceles ABC como centro se traza una semicircunferencia tangente a los lados congruentes CA y CB. Una tangente MN a la semicircunferencia corta a los lados en M y N, respectivamente. Demuestre que $AD^2 = AM \cdot BN$.

31. Calcule el lado de un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia de radio r.

32. $ABCDE$ es un pentágono regular inscrito en un círculo O, y las diagonales AC y BD se cortan en M. Demuestre que $AM^2 = MC \cdot AC$.

33. En un círculo de diámetro $AB = 2R$ se trazan en diferente semiplano las cuerdas AD y AC que hacen con $\overline{AB}$ ángulos de 45° y 30°, respectivamente. Calcule el perímetro del cuadrilátero $ABCD$.

34. $ABCD$ es un cuadrado inscrito en un círculo O y M es un punto cualquiera del arco DC. Demuestre que $\overline{AE}$ y $\overline{BE}$ trisecan el ángulo DEC.

35. Las diagonales AD y BE de un pentágono regular $ABCDE$ de lado a, inscrito en un círculo O, se cortan en P. Demuestre que:

a. $ABDE$ es un trapecio isósceles.
b. $BCDP$ es un rombo.
c. $BP^2 = BE \cdot PE$.
d. $PB = PD = a$ y $OA = OE = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$.

36. $ABCDEF$ es un hexágono regular inscrito, y L, M, N, P, Q y R son los puntos medios de los lados respectivos. Demuestre que $LMNPQR$ es un hexágono regular y halle su lado en función del radio.

37. Desde cada vértice de un cuadrado de lado a como centro y con un radio igual al lado del cuadrado, se describen hacia el interior del cuadrado arcos de circunferencia que se cortan en los puntos M, N, P y Q (figura 6).

a. Calcule el perímetro de la rosa obtenida.
b. Demuestre que $MNPQ$ es un cuadrado.
c. Halle el lado del cuadrado $MNPQ$ en función de a.

Sugerencia: trace $\overline{AM}$ y $\overline{BM}$.

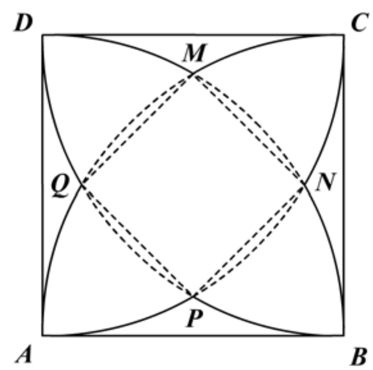


Figura 6

38. En un círculo (O,R) dos cuerdas se cortan perpendicularmente. Demuestre que la suma de los cuadrados de los segmentos en que se dividen es igual a cuatro veces el cuadrado del radio del círculo.

Capítulo 7

Áreas

Contenido breve

Presentación

El área de una figura plana es quizás uno de los temas geométricos mas conocidos por los estudiantes. En este capítulo se estudia la forma de hallar el área de figuras planas como el triángulo, el cuadrilátero, el círculo y el sector circular. Se analiza también la relación que hay entre las áreas de dos triángulos que tienen propiedades tales como igual base, o igual altura, o un ángulo congruente o suplementario, o si los triángulos son semejantes. Por último, se hace un somero estudio sobre la simetría y se aplica en la relación de problemas con áreas sombreadas.

Módulo 24

Áreas básicas

Contenidos del módulo

24.1 Regiones poligonales y sus áreas
24.2 Área de regiones circulares

Herón de Alejandría

(c. 20-62 d.C.). Matemático y científico griego.

Objetivos del módulo

1. Definir la región poligonal y su área.
2. Identificar los postulados sobre áreas de regiones poligonales.
3. Establecer las áreas de las figuras geométricas.
4. Calcular el área de las regiones planas limitadas por las figuras geométricas en estudio.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es una región triangular?
2. ¿Qué es una región poligonal?
3. ¿Qué es el área de una región?
4. ¿Cómo se calcula el área de una región plana?
5. ¿Qué es una región circular?
6. ¿Cómo se calcula el área de una región circular?

Introducción

El presente módulo empieza el estudio de uno de los conceptos geométricos más aplicados, como es el de la medición de una superficie plana o región del plano limitada por una figura geométrica. Se establecen las fórmulas que permiten calcular el área de un rectángulo, un cuadrado, un triángulo, un rombo, un paralelogramo y un trapecio como figuras básicas. Por último, se establece la fórmula para el área de un polígono regular de n lados, se llega al área de la región circular limitada por el círculo y se termina con el área del sector circular.

Vea el módulo 24 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

24.1 Regiones poligonales y sus áreas

Definición 24.1.1

Una región triangular es la unión de un triángulo y sus puntos interiores (figura 24.1).

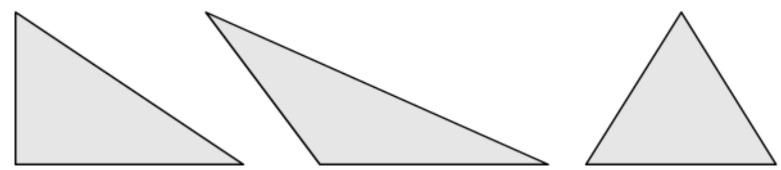


Figura 24.1

Definición 24.1.2

Una región poligonal es la unión de un polígono y sus puntos interiores (figura 24.2).

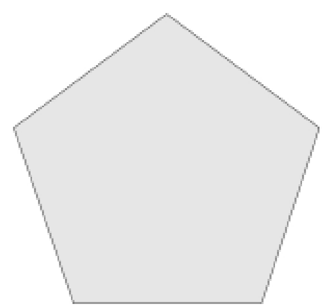


Figura 24.2

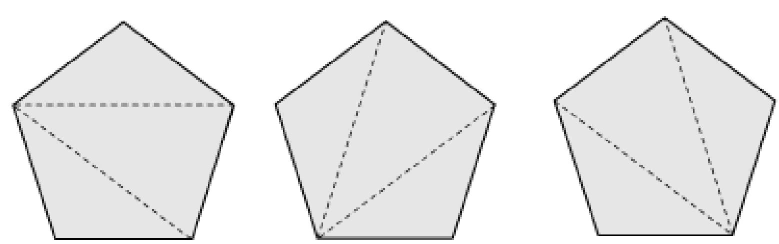


Figura 24.3

Una región poligonal podemos dividirla en un número finito de regiones triangulares (figura 24.3) de tal manera que la intersección (si existe) entre dos cualesquiera de ellas sea un punto o un segmento.

Las regiones o superficies planas que consideramos en este capítulo son entonces subconjuntos del plano limitados por la correspondiente línea poligonal cerrada. Sin embargo, no todo subconjunto del plano es considerado como región; el segmento, la recta, el ángulo y la circunferencia son subconjuntos del plano, pero no son regiones.

Las superficies planas tienen una extensión, y la medida de la extensión es un número real que se llama área de la región plana.

Postulado 24.1.1 (Postulado del área)
A toda región poligonal le corresponde un número real único no negativo, llamado área de la región.

El área de una región plana es independiente de su posición y sólo depende de su tamaño y de su forma.

Postulado 24.1.2 (De la adición de áreas)
El área de una región o superficie plana es la suma de las áreas de las regiones en las cuales ha sido dividida.

Si la superficie o región plana la denotamos por R y las regiones componentes por R_i, entonces:

Área de $R \equiv a(R) \equiv R = a(R_1) + a(R_2) + \ldots a(R_n)$ si y sólo si $R_i \cap R_j = \Phi$ o $R_i \cap R_j =$ punto o $R_i \cap R_j =$ segmento, siendo $R = (R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n)$.

Postulado 24.1.3 (De la congruencia)
Si dos figuras geométricas son congruentes, entonces las regiones planas correspondientes tienen áreas iguales.

El recíproco del postulado anterior no necesariamente se cumple, es decir, si dos regiones planas tienen igual área, no implica que las figuras correspondientes sean congruentes y decimos que son equivalentes.

Para medir el área de una región escogemos arbitrariamente una "unidad de área". La unidad de área está relacionada con la unidad de distancia por conveniencia. Así, si la distancia está en centímetros, el área se medirá en centímetros cuadrados; si la distancia está en metros, el área se medirá en metros cuadrados, y en general para cualquier unidad (***U***) de distancia, el área se medirá en la correspondiente unidad cuadrada ($\boldsymbol{U}^2$).

La unidad de área es entonces la región del plano limitado por un cuadrado cuyo lado mide ***U*** (figura 24.4).

Por ejemplo, en la figura 24.4 $ABCD$ es un cuadrado cuyo lado mide ***U*** unidades de longitud y la medida del área de la región del plano limitada por $ABCD$ es $\boldsymbol{U}^2$. Si $\boldsymbol{U} = 1$ cm, entonces $ABCD = 1 \text{ cm}^2$; si $\boldsymbol{U} = 1$ m, entonces $ABCD = 1 \text{ m}^2$.

Para medir el área de una región plana se ha tomado, por razones prácticas, la forma rectangular como referencia y la región cuadrada como patrón o unidad básica.

Si una región rectangular se puede descomponer en 12 cuadrados (figura 24.5), entonces su área medirá 12 unidades cuadradas. Si la longitud de cada lado del cuadrado anterior es de 1 cm, decimos que el área del rectángulo es de 12 cm cuadrados (12 cm²).

Herón de Alejandría

Se cree que este matemático nació en Egipto. Escribió sobre mecánica, matemáticas y física. Prolífico inventor, ideó varios instrumentos mecánicos, entre ellos la aelípila (máquina a vapor giratoria), la fuente de Herón (aparato neumático que, mediante presión del aire, produce un chorro vertical de agua) y la dioptra (instrumento geodésico). A pesar de estos valiosos aportes, es más conocido como matemático, tanto en la geometría como en el campo de la geodesia, en el que estudió los problemas de las mediciones terrestres. A Herón también se le debe la invención de un método de aproximación a las raíces cuadradas y cúbicas de números que no las tienen exactas.

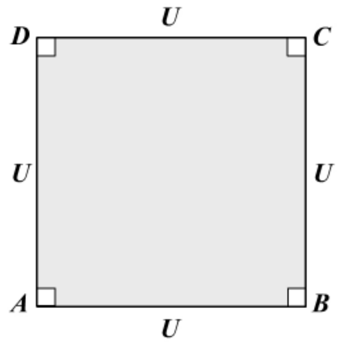


Figura 24.4

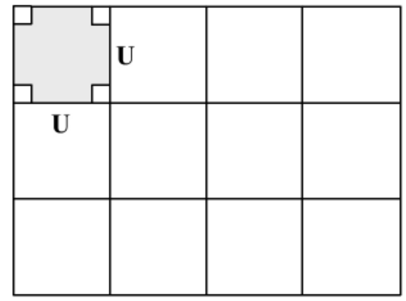


Figura 24.5

En general, si el lado del cuadrado que se toma como patrón mide ***U*** (unidades de longitud), entonces el área medirá 12 ***U*** cuadradas (12 U^2).

Podemos entonces encontrar fácilmente el área de una región trazando pequeños cuadrados unitarios (patrones); será un número entero y por ello se han deducido fórmulas que nos permiten encontrar el área de una región.

En adelante cuando utilicemos los términos base y/o altura nos estamos refiriendo a la "longitud o medida de la base" y a la "longitud de la altura".

Postulado 24.1.4 (Área del rectángulo)
El área de un rectángulo es el producto de la base por la altura (figura 24.6) y escribimos: área $(ABCD) = ABCD = b \cdot h$.

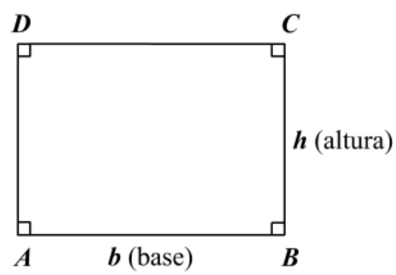


Figura 24.6

Definición 24.1.3

Se llama altura de un paralelogramo al segmento de la perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto a su prolongación (*CI* o *DH* en la figura 24.7).

Teorema 24.1.1

El área de un paralelogramo es el producto entre cualquiera de las bases y la altura correspondiente (figura 24.7).

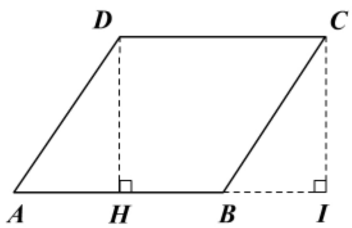


Figura 24.7

Hipótesis:	paralelogramo $ABCD$
	$AB = b$: base
	$DH = h$: altura
Tesis:	$ABCD = b \cdot h$

Demostración

Trazamos $\overline{CI} \perp \overrightarrow{AB}$	Construcción auxiliar.
1. $\overline{DH} \parallel \overline{CI}$	Teorema 14.2.2.
2. $HICD$ es rectángulo	Es equiángulo (¿por qué?).
3. $\Delta AHD \cong \Delta BIC$	H-C.
4. $AB = HI$	De 3 y adición de segmentos.
5. $AHD = BIC$	De 3. Postulado 24.1.3.
6. $AHD + DHBC = DHBC + BIC$	Postulado 24.1.2 y de 5.
7. $ABCD = DHIC$	De 6.
8. $DHIC = HI \cdot IC$	Postulado 24.1.4.
9. $ABCD = AB \cdot DH$	De 4 y $IC = DH$ (de 2).
10. $ABCD = b \cdot h$	De 9 e hipótesis.

Corolario 24.1.1
El área de un cuadrado es el cuadrado de la longitud de su lado.

Corolario 24.1.2
El área de un triángulo rectángulo isósceles es la mitad del cuadrado de la longitud del lado (¿por qué?).

Corolario 24.1.3
El área de un triángulo rectángulo es el semiproducto de los catetos. (La diagonal de un rectángulo determina dos triángulos congruentes.)

Corolario 24.1.4
Paralelogramos con bases y alturas iguales tienen igual área.

Teorema 24.1.2

En cualquier triángulo el producto de la base y la altura correspondiente es independiente de la selección de la base (figura 24.8).

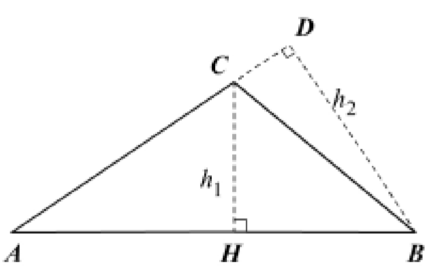


Figura 24.8

Hipótesis:	ΔABC cualquiera
	$CH = h_1$: altura sobre $\overline{AB}$
	$BD = h_2$: altura sobre $\overline{AC}$
Tesis:	$AB \cdot h_1 = AC \cdot h_2$

Demostración

1. $\Delta CAH \sim \Delta BAD$	Corolario 21.1.2.
2. $CA : BA = CH : BD$	De 1. Lados homólogos.
3. $CA : BA = h_1 : h_2$	De 2, hipótesis.
4. $CA \,.\, h_2 = BA \,.\, h_1$	De 3. Propiedad de proporciones.

Teorema 24.1.3

El área de un triángulo cualquiera es el semiproducto de la base por la altura correspondiente (figura 24.9).

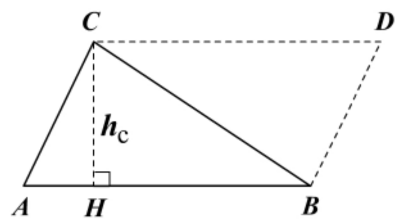


Figura 24.9

Hipótesis: ΔABC cualquiera
$AB = c$
$CH = h_c$: altura

Tesis: $\dfrac{c \,.\, h_c}{2}$

Demostración

Trazamos $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$, $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$	Construcción.
1. $ABCD$ es paralelogramo	$\overline{BD} \parallel \overline{AC}$, $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$.
2. $\Delta ABC \cong \Delta DCB$	De 1 y $\overline{CB}$ diagonal.
3. $ABC = DCB$	Postulado 24.1.3.
4. $ABDC = ABC + BDC$	Postulado 24.1.2.
5. $ABDC = 2ABC$	Sustitución 3 en 4.
6. $ABDC = AB \cdot CH$	Postulado 24.1.4.
7. $2ABC = c \cdot h_c$	De 5, 6 e hipótesis.
8. $ABC = \dfrac{c \,.\, h_c}{2}$	De 7.

Corolario 24.1.5
Dos triángulos con bases y alturas iguales tienen áreas iguales.

Corolario 24.1.6
El vértice de un triángulo puede moverse sobre una recta paralela a la base y el área del triángulo no se altera.

Corolario 24.1.7
El área de un rombo es el semiproducto de las diagonales.

Nota: el área de un triángulo puede expresarse de diversas maneras: sea ABC un triángulo cualquiera (figura 24.10).

$AB = c; \quad BC = a; \quad AC = b$

$AI = ha; \quad CH = h_c \;\; BK = h_b$

$2p = a + b + c$: perímetro

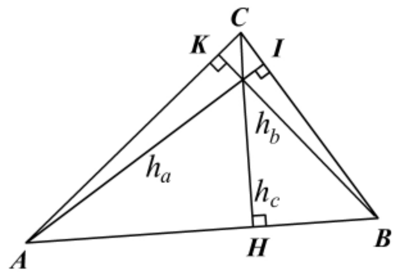


Figura 24.10

1. En función del lado y la altura correspondiente.

$$ABC = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

2. En función de los lados.

De acuerdo con el ejemplo 22.2.3 tenemos:

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro. Luego:

$$ABC = \frac{c}{2} \cdot h_c = \frac{c}{2}.\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$ABC = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ (fórmula de Herón deAlejandría)

3. En función del radio R de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Según el teorema 23.1.5:

$ab = d \cdot h_c = 2R \cdot h_c \Rightarrow h_c = \dfrac{a\,b}{2R}$. Por tanto:

$$ABC = \frac{c}{2} \cdot h_c = \frac{c}{2} \cdot \frac{ab}{2R} \Rightarrow ABC = \frac{abc}{4R}$$

Es decir: el área de un triángulo inscrito en el círculo es igual al cociente entre el producto de los lados y cuatro veces el radio de la circunferencia circunscrita.

4. En función del radio *r* de la circunferencia inscrita al triángulo (figura 24.11).

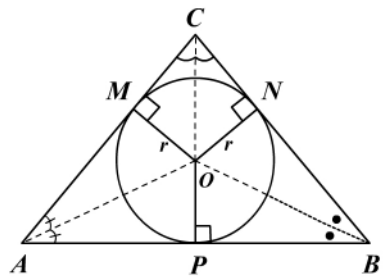


Figura 24.11

Al unir el centro *O* con los vértices del triángulo obtenemos:

$$ABC = AOC + COB + AOB$$

$$ABC = \frac{AC \cdot r}{2} + \frac{CB \cdot r}{2} + \frac{AB \cdot r}{2}$$

$$ABC = \frac{r}{2}(AC + CB + AB)$$

Como $2p = AB + BC + AC$, entonces

$$ABC = 2p \,.\, \frac{r}{2} \Rightarrow ABC = p\,.\,r$$

Es decir: el área del triángulo circunscrito a una circunferencia es el producto entre el semiperímetro del triángulo y el radio de la circunferencia.

Teorema 24.1.4

El área de un trapecio es el producto de la altura por la semisuma de las bases (figura 24.12).

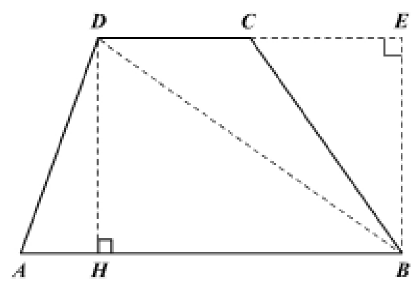


Figura 24.12

Hipótesis: trapecio $ABCD$

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$AB:$ base 1

$CD:$ base 2

$DH = h:$ altura

Tesis: $ABCD = \dfrac{AB + DC}{2} \cdot h$

Demostración

Trazamos la diagonal $\overline{BD}$, $\overline{DH} \perp \overline{AB}$, $\overline{BE} \perp \overline{DC}$; BE y DH son alturas de ΔADB y ΔDCB

1. $ABCD = ABD + DCB$ — Postulado 24.1.2.

2. $ABD = \dfrac{1}{2} AB \cdot DH$ — Área del triángulo.

3. $DCB = \frac{1}{2} \ DC \cdot BE$ Razón de 2.

4. $DH = EB = h$ $DHBE$ es un rectángulo.

5. $ABCD = \frac{1}{2} AB \cdot h + \frac{1}{2} \ DC \cdot h$ 4, 3 y 2 en 1.

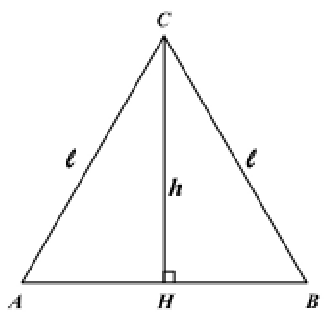
6. $ABCD = \frac{AB + DC}{2} \cdot h$

Corolario 24.1.8
El área de un trapecio es el producto entre la base media y la altura.

Ejemplo 24.1.1

En la figura 24.13 hallemos el área de un triángulo equilátero en función de:

a. El lado ℓ.
b. La altura *h*.



Hipótesis: triángulo equilátero ABC
$AB = BC = CA = \ell$
$CH = h$: altura

Tesis: a. $ABC = ? \ (\ell)$
b. $ABC = ? \ (h)$

Figura 24.13

Solución

a. $HB = \frac{1}{2}$ (¿por qué?)

Por Pitágoras en $\Delta CHB : h = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \sqrt{3\frac{\ell^2}{4}}$

$\therefore \ h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ (1)

Ahora, el área es:

$$ABC = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} \ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ABC = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

b. De (1): $\ell = \frac{2h}{\sqrt{3}} \Rightarrow \ell = \frac{2\sqrt{3}}{3} h = AB$

El área del ΔABC es:

$$ABC = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} h \, . \, h \Rightarrow ABC = \frac{\sqrt{3}}{3} h^2$$

Nota: la altura de un triángulo equilátero siempre es $\ell \frac{\sqrt{3}}{2}$, donde ℓ es el lado del triángulo.

Ejemplo 24.1.2

En la figura 24.14:

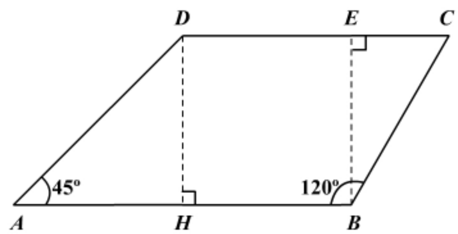


Figura 24.14

Hipótesis: trapecio $ABCD$

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$m(\hat{A}) = 45^{\circ}$, $m(\hat{B}) = 120^{\circ}$

$AB = 27$; $AD = 12\sqrt{2}$

Tesis: $ABCD = ?$

Solución

1. Trazamos $\overline{DH} \perp \overline{AB}$ y $\overline{BE} \perp \overline{DC}$	Construcción.
2. $DHBE$ es un rectángulo	De 1 e hipótesis.
3. $m(E\hat{B}C) = 30^{\circ}$ y $m(\hat{C}) = 60^{\circ}$	De 2.
4. $DH = AH = h$	ΔADH es isósceles.
5. $AD^2 = AH^2 + HD^2 = 2h^2$	Teorema de Pitágoras y de 4.
6. $\left(12\sqrt{2}\right)^2 = 2h^2 \Rightarrow h = 12$	De hipótesis y 5.
7. $BH = AB - AH = 15$	De hipótesis y 6.
8. $BC = 2EC$	Teorema $30^{\circ} - 60^{\circ} - 90^{\circ}$.
9. $BE^2 = 144 = 4EC^2 + EC^2$	Teorema de Pitágoras en ΔBEC.
10. $EC = \frac{12\sqrt{5}}{5}$	De 9.
11. $DC = BH + EC = \frac{15 + 12\sqrt{5}}{5}$	$DE = BH = 15$ y de 10.
12. $ABCD = \frac{AB + DC}{2} \cdot h$	Área del trapecio.
13. $ABCD = \frac{\left(210 + 12\sqrt{5}\right)}{5} \cdot 6$	Sustitución en 12.

Ejemplo 24.1.3

En la figura 24.15:

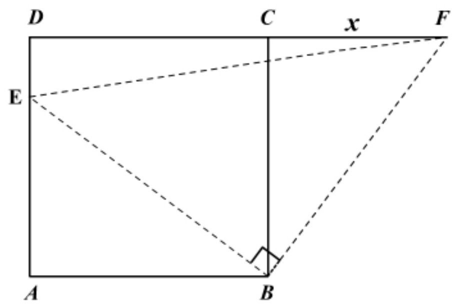


Figura 24.15

Hipótesis: cuadrado $ABCD$

$A-E-D,\ D-C-F$

$\overline{BE} \perp \overline{BF}$

$ABCD = 256$

$EBF = 200$

Tesis: $CF = x = ?$

1. $m\left(A\hat{B}E\right) = 90 - m\left(E\hat{B}C\right) = m\left(C\hat{B}F\right)$ Sustracción de ángulos.
2. $AB = BC = 16$ $ABCD = 256 = BC^2$.
3. $\Delta ABE \cong \Delta CBF$ C-A (de 1 y 2).
4. $AE = CF;\ BE = BF$ De 3.
5. $EBF = 200 = \dfrac{BF^2}{2}$ De 4 y ΔEBF rectángulo.
6. $BF = 20 = BE$ De 5 y 4.
7. $x = \sqrt{BF^2 - BC^2} = 12$ Teorema de Pitágoras y 2, 6.

Ejemplo 24.1.4

El perímetro de un rombo es $2p$ y la suma de las medidas de las diagonales es d. Expresar el área del rombo en función de p y d (figura 24.16).

Solución:

Sea el rombo $ABCD$ con:

Perímetro $= 2p = 4AB$

$$AB = \frac{p}{2} \qquad (1)$$

$AC = m;\ BD = n$

$$AC + BD = d = m + n \qquad (2)$$

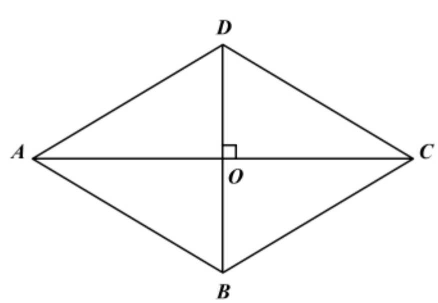


Figura 24.16

Por las propiedades de las diagonales del rombo:

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{m}{2}; \quad OB = \frac{BD}{2} = \frac{n}{2}$$

Por Pitágoras: $AB^2 = AO^2 + OB^2$

Reemplazando: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2$

$$p^2 = m^2 + n^2 \qquad (3)$$

De (2): $d^2 = m^2 + n^2 + 2mn$; sustituyendo en (3):

$$d^2 = p^2 + 2mn \qquad (4)$$

El área del rombo es $ABCD = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{mn}{2}$ (5)

Sustituyendo (5) en (4): $d^2 = p^2 + 4ABCD$

Luego $ABCD = \frac{d^2 - p^2}{4}$.

24.2 Área de regiones circulares

Consideramos primero el área de un polígono regular de *n* lados.

Teorema 24.2.1

El área de un polígono regular de *n* lados es el semiperímetro por la apotema (figura 24.17).

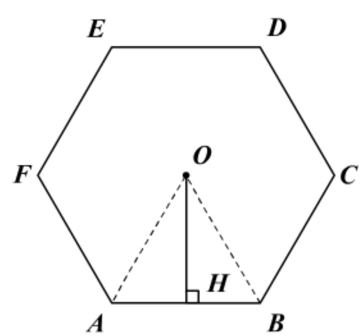


Figura 24.17

Hipótesis: $ABCDEFA$ polígono regular
$AB = ... = FA = \ell_n$
$OH = a_n$: apotema

Tesis: Área = $p \cdot a_n$, donde *p es*: semiperímetro

Demostración
Sabemos que todo polígono regular de *n* lados se puede descomponer en *n* triángulos isósceles congruentes y de vértices en el centro *O*.

Por los postulados 24.1.2 y 24.1.3 sobre áreas, el área del polígono regular será la suma de las áreas de los triángulos isósceles.

El área del triángulo isósceles y el área del polígono es:

Área (polígono) = $n(AOB) = n\frac{AB \cdot OH}{2}$

$$= n\left(\frac{1}{2}\ \ell_n\ a_n\right)$$

$$= \frac{n \cdot \ell_n \cdot a_n}{2}$$

pero $n \cdot \ell_n$ es el perímetro (2*p*) del polígono. Por tanto:

Área (polígono) $= \dfrac{2p\ .\ a_n}{2} = p\ .\ a_n$

Teorema 24.2.2

El área de un círculo de radio *r* es el producto del número irracional π y el cuadrado del radio.

Un círculo no puede descomponerse en triángulos isósceles congruentes como lo hicimos con los polígonos regulares, pero puede dividirse en sectores circulares congruentes suficientemente pequeños y considerados aproximadamente iguales a triángulos isósceles. Para lograr lo anterior basta dividir la circunferencia en un número muy grande de arcos congruentes y trazar los segmentos radiales por sus puntos de división.

Si trazamos dos diámetros perpendiculares, la circunferencia queda dividida en cuatro arcos congruentes y el círculo en cuatro sectores circulares congruentes de ángulo central 90°. Si a continuación trazamos las bisectrices de estos ángulos rectos, obtenemos en la circunferencia ocho arcos congruentes y en el círculo ocho sectores circulares congruentes de ángulo central 45°; si continuamos en forma similar, obtenemos la circunferencia dividida en 16, 32, 64, 128, 256,.... arcos congruentes y el círculo en el mismo número de sectores circulares congruentes (figura 24.18).

Si imaginamos la circunferencia dividida en un número par muy grande de arcos congruentes y al círculo como la unión de igual número de sectores circulares congruentes, y disponemos estos sectores como en la figura 24.19, obtendríamos una figura muy similar a un paralelogramo, de altura igual al radio y de base igual a la longitud de la semicircunferencia.

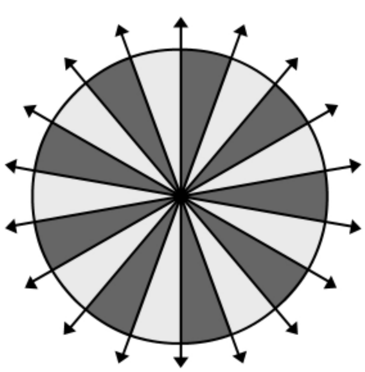


Figura 24.18

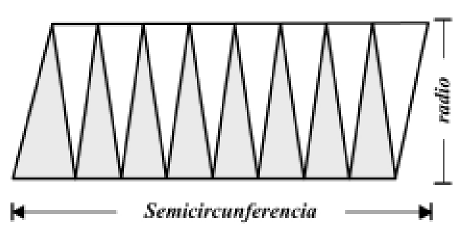


Figura 24.19

Definición 24.2.1

La longitud de una circunferencia es el límite de los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos cuando el número de lados crece indefinidamente.

De acuerdo entonces con la definición 24.2.1 y la figura 24.19, podemos intuitivamente afirmar:

$$
\begin{aligned}
\text{Área del círculo} &= \text{área del paralelogramo}\\
&= \text{base} \times \text{altura}\\
&= \frac{\text{longitud de la circunferencia} \times \text{radio}}{2}\\
&= \frac{2\pi r}{2} \times r = \pi r^2
\end{aligned}
$$

Nota: una demostración rigurosa del área del círculo exige un trabajo con límites. Por tanto se ha hecho una presentación muy intuitiva.

Teorema 24.2.3

El área de un sector circular es el semiproducto de su radio y la longitud de su arco. Recordemos que un sector circular es la región del círculo limitada por un ángulo central (figura 24.20).

$A\hat{O}B$: ángulo central
$OA = OB = r$

$\overparen{AB}$: arco de circunferencia

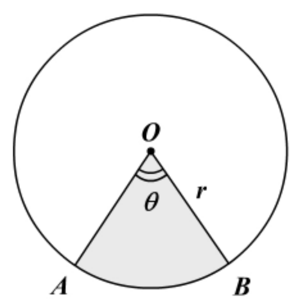


Figura 24.20

Consideremos el círculo dividido en 360 sectores circulares congruentes de ángulo central 1°. Entonces el área que corresponde a cada uno de estos sectores es:

$$\text{Área del sector de } 1° = \frac{\pi r^2}{360°}$$

Si el ángulo central que corresponde a un sector circular es $\theta°$, entonces su área es:

$$\text{Área del sector circular de } \theta° = \frac{\pi r^2}{360°}\theta$$

El área del sector circular puede expresarse como :

$$O(\overset{\frown}{AB}) = \frac{\pi r}{360^{o}}\theta \cdot r = \frac{\text{long } (\overset{\frown}{AB})}{2} \,.\, r = \frac{r^{2}\theta}{2}.$$

Ejemplo 24.2.1

Hallemos la medida del ángulo central correspondiente a un sector circular de área 3π y radio 6.

Solución

Área del sector $= 3\pi = \dfrac{\pi r^{2}}{360^{o}}\theta.$

Luego $\theta = \dfrac{3(360^{o})}{(6)^{2}} \rightarrow \theta = 30^{o}.$

Ejemplo 24.2.2

Hallemos el área del segmento circular dado en la figura 24.21, si $\theta = 72^{o}$, $r = 5$ cm y $AB = 8$ cm.

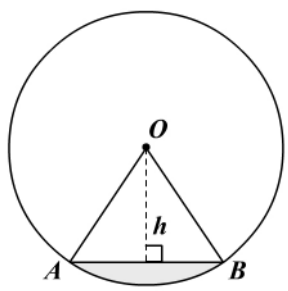


Figura 24.21

Solución

El área del segmento circular (s.c) es igual al área del sector circular $O(\overset{\frown}{AB})$ menos el área del triángulo isósceles AOB.

Área (s.c) = A sector $-$ $A\,(AOB)$

$$= \frac{\pi r^{2}}{360^{o}}\theta - \frac{1}{2}AB \,.\, h$$

$$= \frac{\pi r^{2}}{360^{o}}\theta - \frac{1}{2}AB \,.\, \frac{\sqrt{4r^{2} - (AB)^{2}}}{2}$$

$$= \frac{\pi \times 25 \times 72^{\circ}}{360^{o}} - \frac{1}{4}\times 8 \times \sqrt{100-64}$$

$$= \frac{1}{4}\times 8 \times 6 = 12$$

Área (s.c) = $(5\pi - 12) = 3.7 \text{ cm}^{2}$

Ejemplo 24.2.3

Hallemos el área indicada en la figura 24.22.

Solución

Sea R el radio de la circunferencia exterior. Las dos circunferencias interiores son congruentes y de un diámetro $d = R$, es decir, tienen un $r = R/2$ (figura 24.22).

El área indicada es el área del círculo exterior menos dos veces el área de un círculo interior. Luego:

$$\text{Área pedida} = \pi R^2 - 2(\pi r^2)$$

$$= \pi R^2 - 2\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$= \pi R^2 - 2\pi \frac{R^2}{4}$$

$$= \frac{\pi R^2}{2}$$

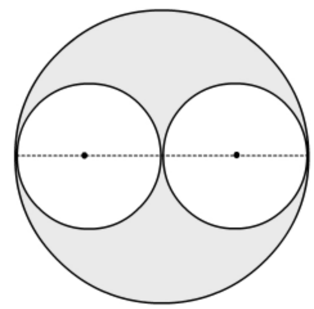


Figura 24.22

Ejemplo 24.2.4

Hallemos el área sombreada en la figura 24.23

Círculo (O,R)

$m(A\hat{O}B) = 120º$

$m(A\hat{O}E) = 90º$

$m(E\hat{O}D) = 45º$

$m(C\hat{O}D) = 45º$

$m(B\hat{O}C) = 60º$

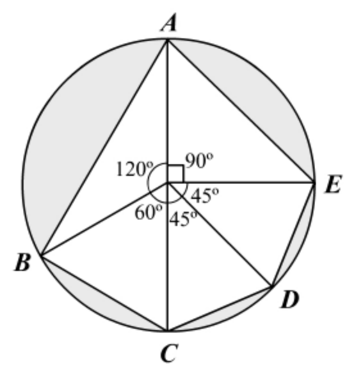


Figura 24.23

Solución

AB es el lado de un triángulo equilátero inscrito, AE es el lado de un cuadrado inscrito, $DE = CD$ son lados de un octógono regular inscrito y BC es el lado de un hexágono regular inscrito.

Área sombreada = área del círculo – área de los triángulos.

$$A(s) = \pi R^2 - AOB - AOE - EOD - DOC - COB$$

$$= \pi R^2 - \frac{1}{2}\ \ell_3 . a_3 - \frac{1}{2} \ell_4 . a_4 - 2\left(\frac{1}{2}\ \ell_8\ . a_8\right) - \frac{1}{2}\ \ell_6 . a_6$$

Del módulo 23 tenemos:

$$\ell_3 = R\sqrt{3} \qquad a_3 = \frac{R}{2}$$

$$\ell_4 = R\sqrt{2} \qquad a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

$$\ell_6 = R \qquad a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$\ell_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad a_8 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}R$$

Reemplazando:

$$A(s) = \pi R^2 - \frac{\sqrt{3}R^2}{4} - \frac{R^2}{2} - \frac{\sqrt{2}R^2}{2} - \frac{\sqrt{3}\,R^2}{4}$$

$$A(s) = \frac{R^2}{4}(4\pi - 2 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$$

$$A(s) = \frac{R^2}{2}(2\pi - 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})$$

Ejercicios
Módulo 24

1. Encuentre el área de un triángulo si:

   a. Dos de sus lados miden 18 y 15 cm y la altura relativa al tercer lado mide 12 cm.
   b. Sus lados miden 5, 12 y 15 cm.
   c. Sus lados miden 20, 13 y 13 cm.
   d. Sus lados miden 15, 20 y 25 cm.

2. Encuentre el área de un paralelogramo si:

   a. La base es $x+3$, la altura $x-2$ y el área es $x^2\,u^2$.

   b. La base es $x-2$, la altura es x y el área es $(x^2-10)\,u^2$.

   c. La base es $x+3$, la altura $x-3$ y el área es $(2x^2-34)\,u^2$.

3. Halle la base de un paralelogramo si el área es 48 cm^2, la base $x + 3$ y la altura $x + 1$.

4. En un paralelogramo halle la base si la base es a la altura como 5 es a 2, y el área del paralelogramo es 90 cm^2.

5. En un rombo encuentre:

   a. Una diagonal si la otra mide 14 cm y el área 42 cm^2.
   b. El lado, si el área es 54 m^2 y las diagonales son entre sí como 4 : 3.
   c. El lado, si el área es 100 m^2 y una diagonal es el doble de la otra.
   d. El lado, si el área es 24 m^2 y una diagonal mide 8 m.
   e. El lado, si el área es 6 m^2 y una diagonal es cuatro veces la otra.

6. *ABCD* es un cuadrilátero. Si $\overline{DE}\perp\overline{AC}$ y $\overline{BF}\perp\overline{AC}$, muestre que $ABDC=\dfrac{DE+BF}{2}AC$

7. *ABCD* es un trapecio con $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$. Si $m(\hat{A})=45°$, $AD=DC=a$ y $AB=3a$, muestre que $ABDC=\sqrt{2}a^2$.

8. *ABCD* es un trapecio isósceles con $\overline{AB}\parallel\overline{DC}$, $AD=DC=CB=a$ y $m(\hat{A})=60°$. Demuestre que $ABDC=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

9. En el trapecio isósceles *ABCD*, $AD=CB=3$, $AC=4$, $\overline{AC}\perp\overline{BC}$ y $\overline{BD}\perp\overline{AD}$. Halle el área *ABCD*.

10. En el trapecio *ABCD*, $AB=80$, $CD=29$, $AD=20$, $CB=37$ y $\overline{AB}\parallel\overline{DC}$. Halle el área *ABCD*.

11. *ABCD* es un paralelogramo, *E* y *F* son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, $AB=18$ y la altura $CH=12$. Halle el área *DEBF*.

En las siguientes figuras (1 a 6) halle el área sombreada de acuerdo con la información dada:

12. En la figura 1:

$AB = BC = AC = m$
D, E y F son puntos medios

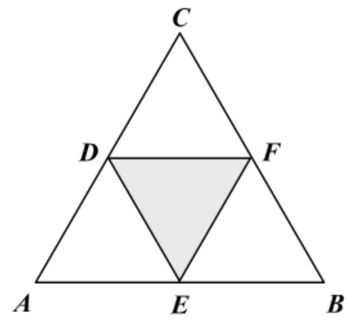


Figura 1

13. En la figura 2:

$AB = BC = CA = m$

$AM = BN = CP = \frac{2}{3}m$

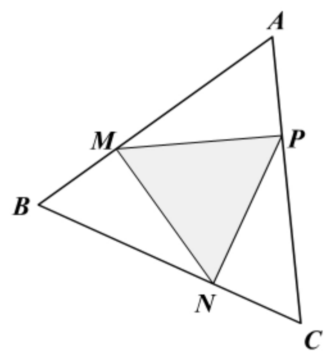


Figura 2

14. En la figura 3:

$AB = BC = CA = m$
D y H son puntos medios
$DEFH$ es un cuadrado

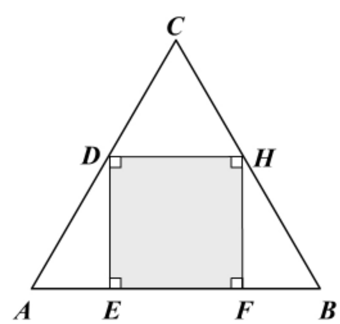


Figura 3

15. En la figura 4:

$ABDCE$ es un pentágono equilátero de lado a.

$\overline{AE} \perp \overline{ED}$ y $\overline{BC} \perp \overline{CD}$

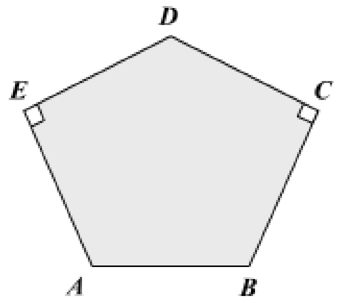


Figura 4

16. En las figuras 5 y 6:

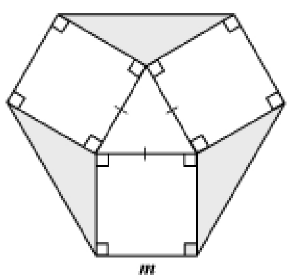


Figura 5

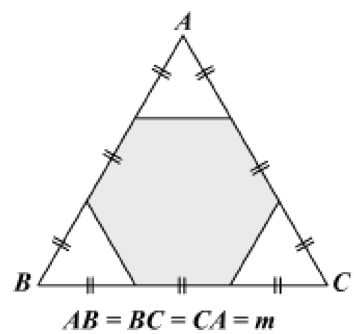


Figura 6

17. Calcule la medida del lado y de la apotema de cada uno de los siguientes polígonos regulares inscritos en una circunferencia de radio 20.

a. Pentágono
b. Hexágono
c. Eneágono
d. Octógono
e. Decágono
f. Dodecágono

18. Halle el área de cada uno de los polígonos anteriores.

19. a. Halle el área de una corona circular limitada por dos circunferencias de diámetro 6 y 10 cm.
b. Determine el área del trapecio circular que corresponde a un ángulo central de 120° y limitado por las circunferen cias anteriores.

20. Sobre el lado AB del cuadrado $ABCD$ se construye exteriormente un triángulo equilátero ABE. Si el lado del cuadrado mide ℓ, halle el área del triángulo ADE.

21. Tres circunferencias congruentes de radio R son tangentes. Halle el área comprendida entre las circunferencias.

Capítulo 7: Áreas

22. Un cuadrado de lado ℓ está inscrito en una circunferencia. Halle el área de la región circular exterior al cuadrado, en función del lado.

23. Un cuadrado de lado ℓ está circunscrito a una circunferencia. Halle el área de la región circular exterior al círculo, en función del lado.

24. Halle las áreas de los ejercicios 22 y 23 en función del radio R.

25. Dados un triángulo equilátero de lado a y una circunferencia de radio R, halle primero en función del lado y luego en función del radio el área comprendida entre las dos figuras si:

a. El triángulo está inscrito en la circunferencia.
b. El triángulo está circunscrito a la circunferencia.

26. Los lados de un triángulo rectángulo son 3, 4 y 5 cm. Halle el área del círculo circunscrito y el área del círculo inscrito.

27. Haciendo centro en cada vértice de un triángulo equilátero de lado a se trazan arcos de circunferencia de radio la mitad del lado. Halle, en función del lado, el área común a los arcos.

En cada una de las siguientes figuras (7 a 15) halle el área sombreada.

28. En la figura 7:

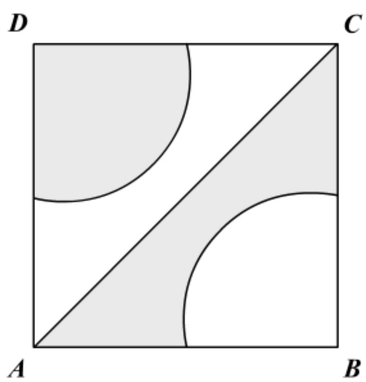


Figura 7

29. En la figura 8:

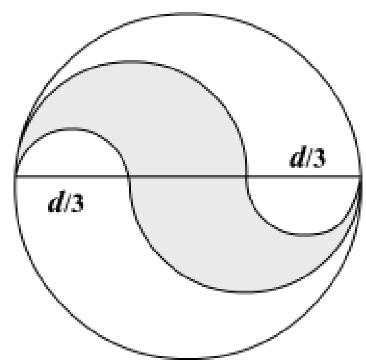


Figura 8

30. En la figura 9, P y Q son puntos medios:

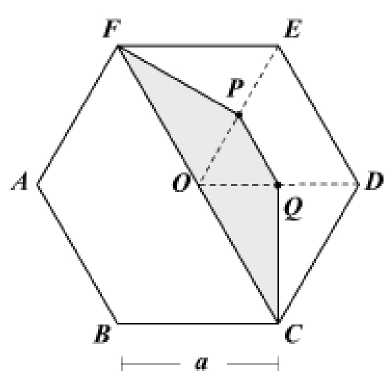


Figura 9

31. En la figura 10 (hexágono regular):

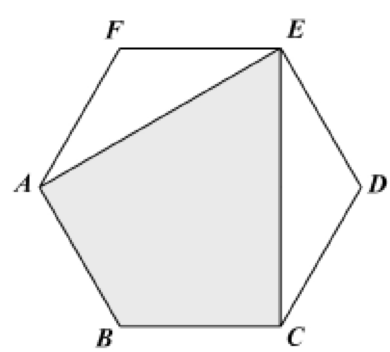


Figura 10

32. En la figura 11: $AB = BC = CD = DA = a$; lado trisecado.

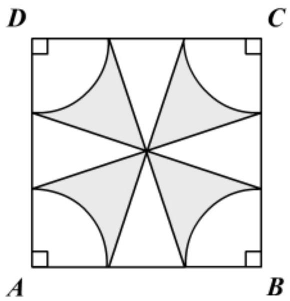


Figura 11

33. En la figura 12: $AB = BC = CD = DA = a$.

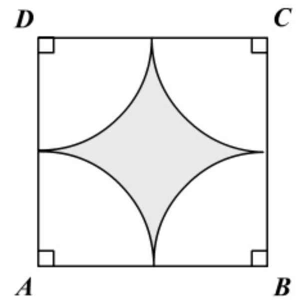


Figura 12

34. En la figura 13: $AB = a$.

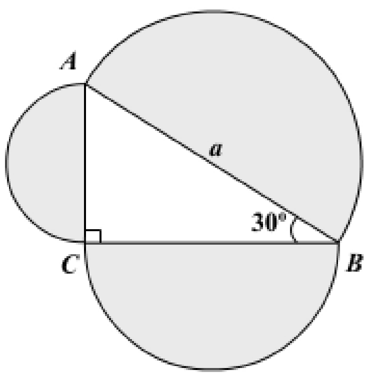


Figura 13

35. En la figura 14: E, F y H son centros y puntos medios. Demuestre que $T = N + M$.

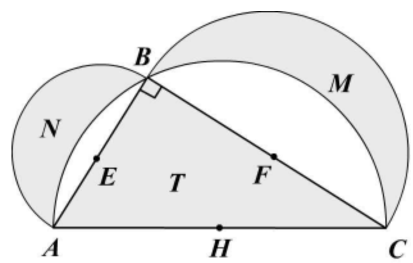


Figura 14

36. En la figura 15:

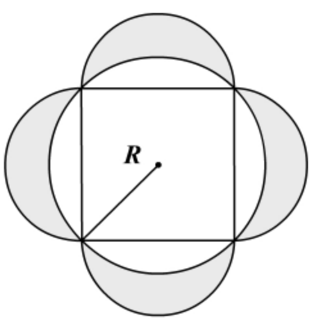


Figura 15

Módulo 25

Relaciones entre áreas

Pappus de Alejandría

(ss. III-IV). Matemático griego, nacido en Alejandría (Egipto), tal vez la ciudad más importante del mundo antigüo.

Contenidos del módulo

25.1. Relaciones entre áreas

Objetivos del módulo

1. Establecer la relación entre las áreas de dos triángulos que tienen una propiedad común.
2. Establecer la razón entre las áreas de dos paralelogramos.
3. Establecer la relación entre el paralelogramo «inscrito» y el «circunscrito» a un cuadrilátero.

Preguntas básicas

1. ¿Qué relación hay entre las áreas de dos triángulos que tienen igual base? ¿Igual altura? ¿Un ángulo congruente o suplementario?
2. ¿Qué relación hay entre las áreas de dos triángulos que son semejantes?
3. ¿Qué relación hay entre las áreas de dos paralelogramos de igual base o de igual altura?
4. ¿Qué relación se puede establecer entre las áreas de un paralelogramo y un cuadrilátero?
5. ¿En qué consiste el teorema de Giovanni Ceva?

Introducción

En este módulo se establecen relaciones entre las áreas de triángulos que tienen una propiedad común. Se presenta además la relación entre las áreas de dos paralelogramos que tienen igual base o altura. Se establece una relación entre las áreas del paralelogramo «inscrito» y el «circunscrito» a un cuadrilátero y se demuestra además el teorema de Giovanni Ceva aprovechando la relación entre las áreas de triángulos.

Vea el módulo 25 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

25.1 Relaciones entre áreas

A continuación se presentan algunas relaciones entre áreas de triángulos que tienen alguna propiedad común entre sus elementos.

Teorema 25.1.1

Las áreas de dos triángulos que tienen bases iguales están en la misma razón que sus alturas. Si h_1 y h_2 son las alturas correspondientes a la base b en los triángulos *ABC* y *DEF* en la figura 25.1*a*, entonces:

$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{\frac{1}{2}\ b.\ h_1}{\frac{1}{2}\ b.\ h_2} \Rightarrow \frac{ABC}{DEF} = \frac{h_1}{h_2}$$

Teorema 25.1.2

Las áreas de dos triángulos que tienen alturas iguales están en la misma razón que las bases. La demostración se deja como ejercicio.

Teorema 25.1.3

Las áreas de dos paralelogramos que tienen igual base (o igual altura) están en la misma razón que las alturas (o las bases). La demostración se deja como ejercicio.

Teorema 25.1.4

Las áreas de dos triángulos que tienen un ángulo congruente o suplementario están en la misma razón que los productos de los lados que comprenden dichos ángulos (figura 25.1*b*).

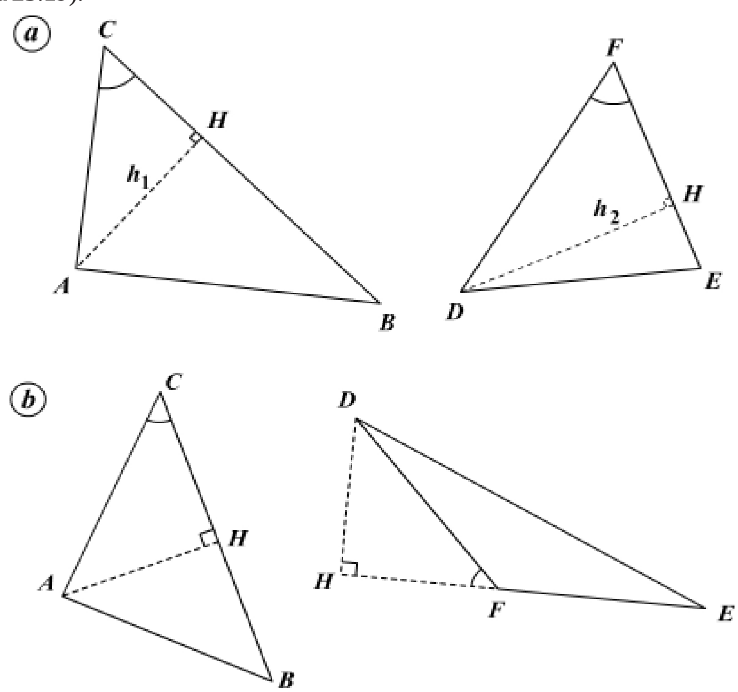


Figura 25.1

a. Hipótesis: $\hat{C} \cong \hat{F}$

b. Hipótesis: $\hat{C} \cong D\widehat{F}H$

$\hat{C}$ y $D\widehat{F}E$ suplementarios

Tesis: $\dfrac{ABC}{DEF} = \dfrac{CA\,.\,CB}{FD\,.\,FE}$

Tesis: $\dfrac{ABC}{DEF} = \dfrac{CA \cdot CB}{FD \cdot FE}$

Demostración

1. $ABC = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot AH$	Área de un triángulo.
2. $DEF = \frac{1}{2} \cdot FE \cdot DH$	Razón de 1.
3. $\frac{ABC}{DEF} = \frac{CB \cdot AH}{FE \cdot DH}$	De 1 y 2.
4. $\Delta AHC \sim \Delta DHF$	¿Por qué?
5. $AH : DH = AC : DF$	De 4.
6. $\frac{ABC}{DEF} = \frac{CB \cdot AC}{FE \cdot DF}$	Sustitución de 5 en 3.

Teorema 25.1.5

Si dos triángulos son semejantes, la razón entre sus áreas es el cuadrado de la razón de dos elementos correspondientes cualesquiera (figura 25.2).

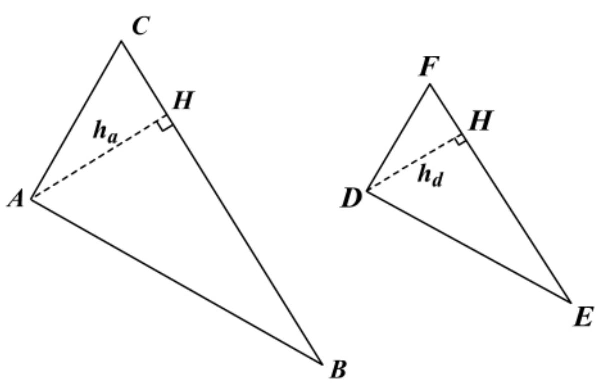


Figura 25.2

Hipótesis: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$AC = b,\ BC = a,\ BA = c$

$DE = f,\ DF = e,\ FE = d$

$AH = h_a,\ DH = h_d$

Tesis:

$$\frac{ABC}{DEF} = (a/d)^2 = (b/e)^2 = (c/f)^2 = (h_a/h_d)^2 = \ldots = (m_a/m_d)^2 = \ldots = (b_a/b_d)^2 = \ldots$$

Pappus de Alejandría

Último gran matemático de la escuela alejandrina, escribió comentarios a los *Elementos* de Euclides y a la gran sintaxis matemática de Ptolomeo, llamada *Almagesto* por los árabes. Su obra principal, la *Colección matemática*, escrita hacia el 340, está compuesta por ocho libros, casi todos conservados (excepto el primero y parte del segundo), contiene una serie de problemas que introducen nociones geométricas importantes, como el foco de una parábola o la directriz de una cónica, y los enunciados de muchos teoremas, entre ellos el que expresa la superficie y el volumen de las figuras de revolución.

Demostración

1. $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = \frac{h_a}{h_d} = \ .... \ = \frac{m_a}{m_d} = \ .... = \frac{b_a}{b_d} \ = \ ....$ $\qquad \Delta ABC \sim \Delta DEF.$

2. $ABC = \frac{1}{2}.\ a\ .\ h_a$ $\qquad$ Área del triángulo.

$DEF = \frac{1}{2}\ .\ d\ .\ h_d$

3. $\frac{ABC}{DEF} = \frac{a}{d} \cdot \frac{h_a}{h_d}$ $\qquad$ De 2.

4. $\frac{ABC}{DEF} = (a/d)^2 = (h_a/h_d)^2 \ = \ ....$ $\qquad$ Sustitución de 1 en 3.

Corolario 25.1.1

Las áreas de dos paralelogramos que tienen bases iguales, están en la misma razón que sus alturas.

Corolario 25.1.2

Las áreas de dos paralelogramos que tienen alturas iguales, están en la misma razón que sus bases.

Ejemplo 25.1.1

En la figura 25.3:

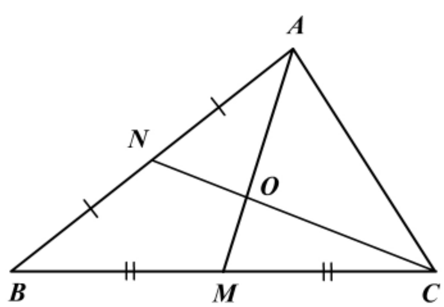


Figura 25.3

Hipótesis: triángulo ABC
O baricentro
$\overline{AM}$, $\overline{CN}$ medianas

Tesis: $COM = AON$

Solución

1. $M\hat{O}C \cong A\hat{O}N$ $\qquad$ ¿Por qué?

2. $\frac{COM}{AON} = \frac{OC\ .\ OM}{AO\ .\ ON}$ $\qquad$ De 1. Teorema 25.1.4.

3. $\frac{COM}{AON} = \frac{\frac{2}{3}\ CN.\ \frac{1}{3}\ AM}{\frac{2}{3}\ AM\ .\ \frac{1}{3}\ CN} = 1$ $\qquad$ Las medianas se cortan en la razón 2 : 1.

4. $COM = AON$

Ejemplo 25.1.2 (Teorema de Giovanni Ceva, 1647-1746)

En la figura 25.4:

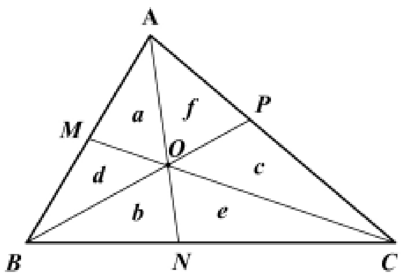


Figura 25.4

Hipótesis: O interior al ΔABC

$AOM = a, BON = b, COP = c$

$BOM = d, CON = e, AOP = f$

Tesis: $$\frac{AM \,.\, BN \,.\, CP}{MB \,.\, NC \,.\, PA} = 1$$

Solución

1. $\dfrac{a}{d} = \dfrac{MA \,.\, MO}{MB \,.\, MO} = \dfrac{MA}{MB}$ — $A\widehat{M}O$ suplemento de $B\widehat{M}O$. Teorema 25.1.4

2. $\dfrac{b}{e} = \dfrac{NB \,.\, NO}{NC \,.\, NO} = \dfrac{NB}{NC}$ — $B\widehat{N}O$ suplemento de $C\widehat{N}O$. Teorema 25.1.4.

3. $\dfrac{c}{f} = \dfrac{PC \,.\, PO}{PA \,.\, PO} = \dfrac{PC}{PA}$ — $C\widehat{P}O$ suplemento de $A\widehat{P}O$.

4. $\dfrac{a\ b\ c}{d\ e\ f} = \dfrac{MA \,.\, NB \,.\, PC}{MB \,.\, NC \,.\, PA}$ — De 1, 2 y 3.

5. $\dfrac{a}{e} = \dfrac{OA \,.\, OM}{ON \,.\, OC}$ — $A\widehat{O}M \cong N\widehat{O}C$. Teorema 25.1.4.

6. $\dfrac{b}{f} = \dfrac{OB \,.\, ON}{OA \,.\, OP}$ — $B\widehat{O}N \cong A\widehat{O}P$. Teorema 25.1.4.

7. $\dfrac{c}{d} = \dfrac{OC \,.\, OP}{OB \,.\, OM}$ — $C\widehat{O}P \cong B\widehat{O}M$. Teorema 25.1.4.

8. $\dfrac{a\ b\ c}{d\ e\ f} = 1$ — De 5, 6 y 7.

9. $\dfrac{AM \,.\, BN \,.\, CP}{BM \,.\, NC \,.\, PA} = 1$ — De 4 y 8.

Ejemplo 25.1.3

Demostrar que el área del paralelogramo que resulta al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero es la mitad del área del cuadrilátero (figura 25.5).

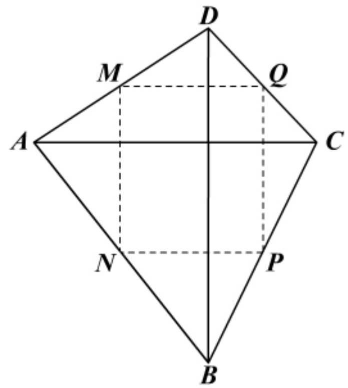


Figura 25.5

Hipótesis:	cuadrilátero *ABCD* *M, N, P, Q* puntos medios paralelogramo *MNPQ*
Tesis:	*MNPQ* = *ABCD* / 2

Demostración

Trazamos las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ del cuadrilátero *ABCD.*

1. $MQ = \frac{1}{2}AC = NP$ — $\overline{MQ}, \overline{NP}$ son paralelas medias.

   $\overline{MQ} \parallel \overline{AC} \parallel \overline{NP}$

2. $PQ = \frac{1}{2}BD = MN$ — $\overline{PQ}, \overline{MN}$ son paralelas medias.

   $\overline{PQ} \parallel \overline{DB} \parallel \overline{MN}$

3. $\Delta DMQ \sim \Delta DAC$; $\Delta CQP \sim \Delta CDB$ — De 1 y 2. Teorema de Tales.

   $\Delta BNP \sim \Delta BAC$; $\Delta AMN \sim \Delta ADB$

4. $\frac{DMQ}{DAC} = (MQ/AC)^2 = \frac{1}{4}$ — De 3. Teorema 25.1.5 y sustitución de 1.

5. $\frac{CPQ}{CDB} = (PQ/BD)^2 = \frac{1}{4}$ — Razón de 4.

6. $\frac{BNP}{BAC} = (NP/AC)^2 = \frac{1}{4}$ — De 3. Teorema 25.1.5 y sustitución de 2.

7. $\frac{AMN}{ADB} = (MN/BD)^2 = \frac{1}{4}$ — Razón de 6.

8. $ABCD = MNPQ + DMQ + CQP + BNP + AMN$ — Postulado 24.1.2.

9. $ABCD = MNPQ + \frac{DAC}{4} + \frac{CDB}{4} + \frac{BAC}{4} + \frac{ABD}{4}$ — Sustitución de 4, 5, 6, 7 en 8.

10. $ABCD = \dfrac{\Delta MNPQ + (DAC + BAC) + (CDB + ABD)}{4}$

11. $ABCD = 2\,MNPQ$ De 10. Adición de áreas.

Como ejercicio, demuestre que el área del paralelogramo que resulta al trazar por los vértices opuestos de un cuadrilátero paralelas a las diagonales es el doble del área del cuadrilátero.

Ejercicios

Módulo 25

1. En un triángulo ABC y O es el baricentro, $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ son las medianas. Demuestre que $EODC = AOB$.

2. En un triángulo ABC, AD es la bisectriz.

   a. Muestre que $ABD : ADC = AB : AC$
   b. Muestre que $ABD : ADC = BD : DC$
   c. Concluya el teorema de la bisectriz. (Sugerencia: trace $\overline{BN} \perp \overline{AD}$ y $\overline{CE} \perp \overline{AD}$.)

3. Demuestre que las tres medianas de un triángulo determinan seis triángulos de áreas iguales.

4. Las áreas de dos triángulos semejantes están en la razón 25 : 16. Encuentre:

   a. Un lado del mayor si su correspondiente del menor es 80 cm.
   b. Una mediana del mayor si su correspondiente del menor es 10 cm.
   d. El perímetro del menor si el perímetro del mayor es 125 cm.

5. Por los vértices de un cuadrilátero se trazan paralelas a las diagonales. Demuestre que la figura resultante es un paralelogramo cuya área es el doble del área del cuadrilátero. ¿Cuál es la relación entre las áreas de este paralelogramo y el que resulta al unir los puntos medios de los lados del cuadrilátero?

6. $ABCD$ es un trapecio isósceles con $AD = BC = 15$ cm. Las diagonales se cortan en O, son perpendiculares a los lados congruentes y cada una mide 20 cm.

   a. Qué relación hay entre las áreas ABD y ACB.
   b. Qué relación hay entre las áreas ADC y BCD.
   c. Qué relación hay entre las áreas AOB y DOC.
   d. Demuestre que BOC es media proporcional entre DOC y AOB.
   e. Demuestre que $ABCD = (\sqrt{DOC} + \sqrt{AOB})^2$.

7. M, N y P son, respectivamente, los puntos medios de los lados AB, BC y CD del cuadrilátero $ABCD$. Si $MN = 39$ cm, $NP = 41$ cm y $PM = 50$ cm, halle el área de $ABCD$.

8. M y N son los puntos medios de los lados no paralelos AD y CB del trapecio $ABCD$ y P es un punto sobre AB tal que $\overline{PN}$ es paralelo a $\overline{AD}$. Demuestre que $APD = PBCD = \frac{1}{2} ABCD$.

9. En la figura 1:

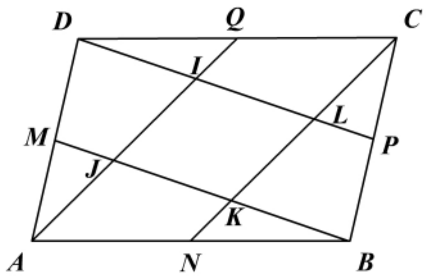


Figura 1

Hipótesis: paralelogramo *ABCD*
M, *N*, *P*, *Q* son puntos medios
Tesis: *IJKL* es un paralelogramo

$$IJKL = \frac{1}{5} ABCD$$

10. Si en el ejercicio 9 *ABCD* fuera un cuadrado de lado *a*, halle el área *IJKL*.

11. En la figura 2:

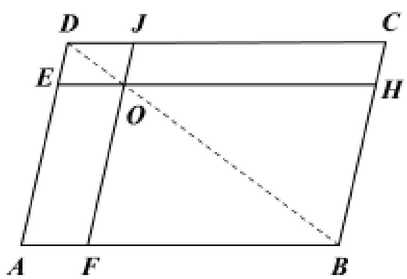


Figura 2

Hipótesis: paralelogramo *ABCD*
$\overline{FJ} \parallel \overline{AD}$, $\overline{EH} \parallel \overline{AB}$
Tesis: $AFOE = JOHC$

12. En la figura 3:

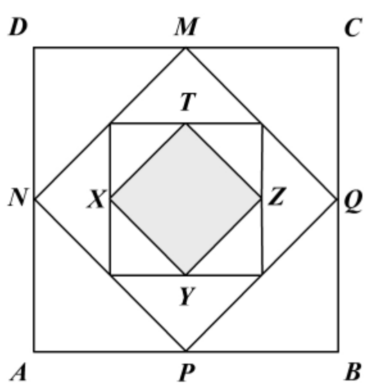


Figura 3

Hipótesis: cuadrado *ABCD* de lado *a*.
M, *N*, *P*, *Q* son puntos medios y así sucesivamente
Tesis: $TXYZ = ?$

13. En la figura 4:

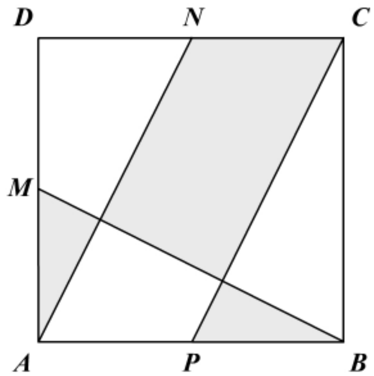


Figura 4

Hipótesis: cuadrado $ABCD$ de lado a
M, N, P son puntos medios

Tesis: Área sombreada

14. En la figura 5:

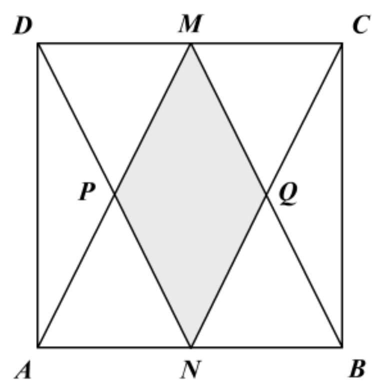


Figura 5

Hipótesis: cuadrado $ABCD$ de lado a
M, N son puntos medios

Tesis: $MPNQ = ?$

15. En la figura 6:

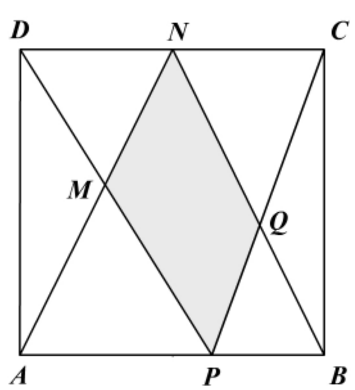


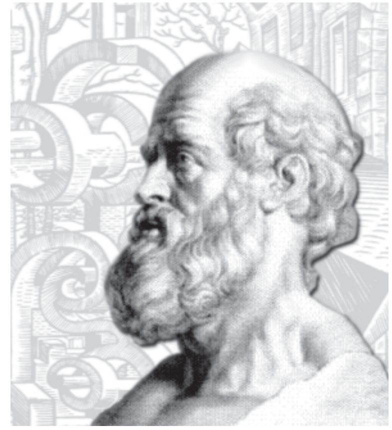
Figura 6

Hipótesis: $ABCD$ cuadrado de lado a
N es punto medio
$AP = 2\,PB$

Tesis: $MPQN = ?$

Módulo 26

Áreas sombreadas



Hipócrates de Quíos

(c. 470 a.C.-?). Matemático griego nacido en Quíos, isla situada al este de Grecia.

Contenidos del módulo

26.1 Áreas sombreadas

Objetivos del módulo

1. Definir puntos simétricos.
2. Definir figuras simétricas.
3. Presentar la simetría de un punto respecto a una recta.
4. Hallar áreas de figuras geométricas limitadas por segmentos rectilíneos y/o curvilíneos.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es simetría?
2. ¿Qué son puntos simétricos?
3. ¿Qué son figuras geométricas simétricas?
4. ¿Qué son el centro y el eje de simetría de una figura?
5. ¿En qué se aplica la simetría de las figuras?

Introducción

El módulo comienza con una presentación sencilla del concepto de simetría, lo cual permite identificar si dos figuras geométricas son simétricas y poder así calcular más fácilmente el área de ciertas regiones del plano que involucran figuras simétricas.

Vea el módulo 26 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

26.1 Áreas sombreadas

Consideremos algunos conceptos básicos que facilitarán la solución de problemas con figuras geométricas limitadas por algún(os) segmento(s) curvilíneo(s).

Definición 26.1.1: Simetría respecto a un punto

Dos puntos son simétricos con respecto a otro punto si éste es el punto medio del segmento que une los dos primeros; el punto medio se llama *centro de simetría*.

En la figura 26.1, A y A' son simétricos respecto a O; D y D' son simétricos respecto a O. El punto O se llama centro de simetría.

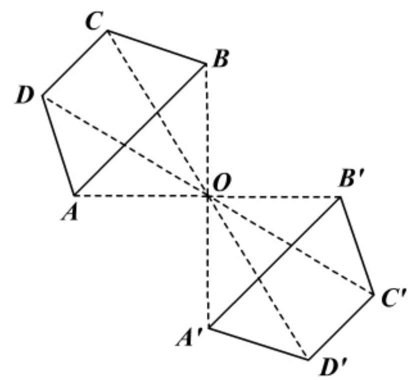


Figura 26.1

Definición 26.1.2: Figuras simétricas

Dos figuras geométricas son simétricas con respecto a un punto cuando cada uno de los puntos de una de las figuras es el simétrico, con respecto al centro de simetría, de su correspondiente punto en la otra figura. Decimos entonces que en la figura 26.1 $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son simétricas con respecto al punto O, y los elementos (lados, ángulos) se llaman "homólogos".

Teorema 26.1.1

Dos figuras simétricas con respecto a un punto son congruentes.

En la figura 26.1 los triángulos que resultan son congruentes por L-A-L y los elementos homólogos son congruentes, lo que permite concluir la congruencia de las figuras.

Corolario 26.1.1
Dos segmentos simétricos con respecto a un punto son congruentes y paralelos.

Definición 26.1.3: Simetría con respecto a una recta

Dos puntos son simétricos con respecto a una recta si esta recta es la mediatriz del segmento que tiene por extremos los puntos dados (figura 26.2).

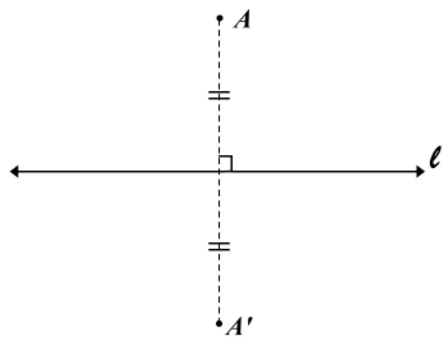


Figura 26.2

La recta ℓ se llama *eje de simetría.*

Una figura geométrica admite un *eje de simetría* cuando todos sus puntos son dos a dos simétricos con respecto a este eje (figura 26.3).

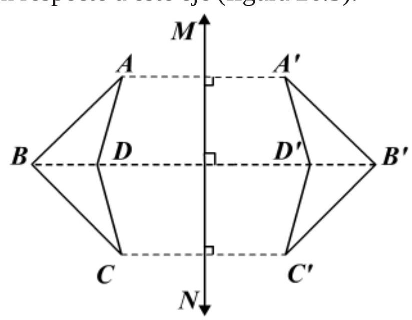


Figura 26.3

La recta *MN* se llama eje de simetría. Las figuras *ABCD* y *A'B'C'D'* son simétricas con respecto a la recta *MN*.

Teorema 26.1.2

Dos figuras geométricas simétricas con respecto a un eje, son congruentes.

Teorema 26.1.3

Si una figura es simétrica con respecto a dos ejes perpendiculares entre sí, entonces el punto de intersección de los ejes es centro de simetría (figura 26.4).

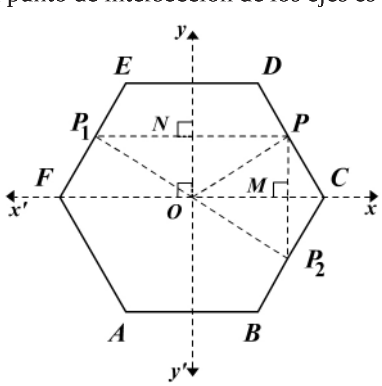


Figura 26.4

Hipótesis: *P* punto cualquiera de la figura. P_1, P_2 son puntos simétricos con respecto a los ejes perpendiculares

Tesis: P_1 y P_2 son simétricos con respecto a *O*

Hipócrates de Quíos

Antecedió a Euclides en diversos temas de geometría y se ocupó especialmente del problema de la cuadratura del círculo y consiguió, con la llamada *lúnula de Hipócrates*, trazar una lúnula de área igual a la de un triángulo que es mitad de un cuadrado dado.

Aplicó el procedimiento denominado «por reducción al absurdo» y escribió *Elementos de geometría*.

Demostración

Debemos demostrar que $P_1 - O - P_2$ y $OP_1 = OP_2$

1. $m(y\hat{O}P) + m(P\hat{O}x) = 90°$	$y\hat{O}x$ es recto.
2. $m(y\hat{O}P_1) + m(P_1\hat{O}x') = 90°$	$y\hat{O}x'$ es recto.
3. $PM = MP_2$	P_2 simétrico de P.
4. $\Delta PMO \cong \Delta P_2MO$	C–C : De 3 y $\overline{OM}$ común.
5. $m(P\hat{O}M) = m(P_2\hat{O}M)$	De 4: $P\hat{O}M \cong P_2\hat{O}M$.
6. $P_1N = PN$	P_1 simétrico de P.
7. $\Delta PON \cong \Delta P_1ON$	C–C: De 6 y $\overline{ON}$ común.
8. $m(P_1\hat{O}N) = m(P\hat{O}N)$	De 7: $P_1\hat{O}N \cong P\hat{O}N$.
9. $P_1\hat{O}x' \cong P\hat{O}M$	Complementos de ángulos congruentes, (8).
10. $P_1\hat{O}x' \cong P_2\hat{O}M$	De 9 y 5.
11. $m(P_1\hat{O}x') + m(P_1\hat{O}M) + m(y\hat{O}P)$ $+ m(P\hat{O}M) = 180°$	De 1 y 2.
12. $m(P_1\hat{O}P_2) = 180°$	Sustitución de 10 en 11.
13. $P_1 - O - P_2$	$P\hat{O}_1P_2$ es rectilíneo.
14. $OP_2 = OP$	De 4. ¿Por qué?
15. $OP_1 = OP$	De 7. ¿Por qué?
16. $OP_1 = OP_2$	De 14 y 15.
17. P_1 y P_2 son simétricos con respecto a O.	De 13 y 16: O es punto medio de $\overline{P_1P_2}$.

Nota: dos figuras geométricas simétricas, como son congruentes, tienen igual área.

Ejemplo 26.1.1

ABCD es un cuadrado de lado *a*, y desde dos vértices opuestos, como centros, trazamos arcos de circunferencia de radio *a*. Hallar el área comprendida entre los arcos (figura 26.5).

Solución

Trazamos la diagonal *DB*. Los dos arcos resultantes son simétricos con respecto a la diagonal $\overline{DB}$. El área sombreada es entonces dos veces el área indicada en la figura 26.6.

Área sombreada = área sector $A(DB)$ – área triángulo *ABD*

$$= \frac{1}{2} r^2\theta - \frac{1}{2} AB \, . \, AD$$

$$= \frac{1}{2}(a)^2 \, . \, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} a \, . \, a$$

Área sombreada = $\dfrac{a^2}{4}\ (\pi - 2)$

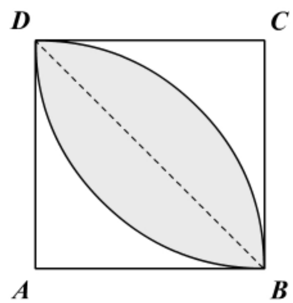


Figura 26.5

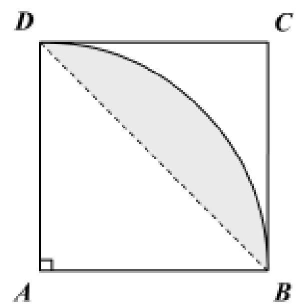


Figura 26.6

Ejemplo 26.1.2

ABC es un triángulo equilátero de lado *a*. Desde cada vértice como centro se trazan arcos de circunferencia de radio *a*. Hallar el área comprendida entre el triángulo y los arcos (figura 26.7).

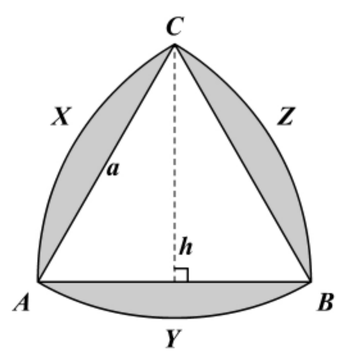


Figura 26.7

Solución

Los segmentos circulares *AXC, AYB, BZC* son congruentes. ¿Por qué?

$$
\begin{aligned}
A(s) &= 3\,(AXC)\\
&= 3\,(\text{área sector } B(\widehat{AXC}) - \text{área triángulo } BAC)\\
&= 3\left(\frac{1}{2}r^2\cdot\ \theta - \frac{1}{2}\,AB\cdot h\right)\\
&= 3\left(\frac{1}{2}\,a^2\ .\pi/3 - \frac{1}{2}\,a\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= 3\left(\frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)
\end{aligned}
$$

$$A(s) = \frac{a^2}{4}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

Ejemplo 26.1.3

Desde cada vértice de un cuadrado de lado *a* se trazan arcos de circunferencia de radio igual a la mitad de la diagonal; luego se unen dos a dos los extremos de estos arcos (figura 26.8) y se obtiene la Cruz de Malta. Hallar el área de la cruz.

Solución

Trazamos las diagonales *AC* y *BD*. Como los arcos son congruentes, y por las simetrías presentadas, el área de la cruz es ocho veces el área sombreada en la figura 26.9.

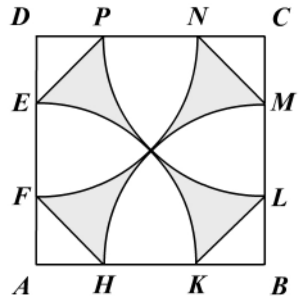


Figura 26.8

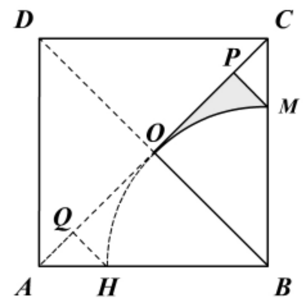


Figura 26.9

$$\text{Área (cruz)} = 8 \text{ área } (OMP)$$

$$= 8\,(\text{área } (\Delta BOC) - \text{área } B(\overset{\frown}{OM}) - \text{área } (\Delta MPC))$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Luego el radio $= r = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, (1)

$$CM = CB - BM = a - \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CM = \frac{a}{2}\left(2 - \sqrt{2}\right) \qquad (2)$$

El triángulo *CMP* es un triángulo rectángulo isósceles (¿por qué?) y el lado $CP = PM = x$.

$CM^2 = CP^2 + PM^2$, sustituyendo (2):

$$\left[\frac{a}{2}\left(2 - \sqrt{2}\right)\right]^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{8}\left(6 - 4\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2}) = x^2 \qquad (3)$$

$$\text{Área (cruz)} = 8\left(\frac{1}{2}BO.OC - \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}\,CP.\,PM\right)$$

$$= 8\left(\frac{1}{2}BO^2 - \frac{1}{2}BO^2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}CP^2\right)$$

Reemplazando (1) y (3):

Área (cruz) $= 8\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\cdot 2}{4}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4}\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\right]$

$$= 8\left[\frac{a^2}{4} - \frac{a^2\pi}{16} - \frac{a^2}{8}\left(3-2\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \frac{8a^2}{16}\left[4-\pi-2\left(3-2\sqrt{2}\right)\right]$$

Área (cruz) $= \frac{a^2}{2}\left[4\sqrt{2} - 2 - \pi\right]$

Ejemplo 26.1.4

En la figura 26.10:

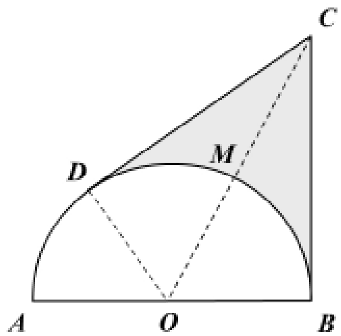


Figura 26.10

Hipótesis: $O(A) = O(B) = O(D)$
$OA = OB = OD = r = AD = r$
$\overline{CD}$ tangente
$\overline{BC}$ tangente

Tesis: área $CDB = \frac{r^2}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$

Solución

Trazamos $OD = r$ y $\overline{OMC}$

$\overline{OD} \perp \overline{CD}$ y $\overline{OB} \perp \overline{BC}$	$\overline{CD}$, $\overline{BC}$ tangentes
$OCD = OCB$	$\Delta OCD \cong \Delta OCB$
$m(D\widehat{O}C) = m(C\widehat{O}B) = 60°$	¿Por qué?
$OB = \frac{OC}{2} = r$	Teorema 30° - 60° - 90°
$CB = \sqrt{OC^2 - OB^2} = r\sqrt{3}$	$OC = 2r$, $OB = r$

Área $CDB = 2$ área CMB

$$= 2(\text{área } OBC - \text{área } O(\widehat{MB}))$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\,OB\,.\,BC - \frac{1}{2}\,r^2\theta\right)$$

$$= OB.\,BC - r^2\,\frac{\pi}{3}$$

$$= r.\,r\sqrt{3} - \frac{r^2\pi}{3}$$

Área $CDB = \frac{r^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$

Ejercicios

Módulo 26

1. Los radios de dos circunferencias concéntricas están en la relación 1:2. Si la cuerda AB es tangente a la circunferencia interior, determine el área de la región circular limitada por la secante y la circunferencia exterior.

2. En un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 cm se inscribe una circunferencia. Halle el área del círculo.

3. Se inscriben y se circunscriben dos circunferencias a un triángulo equilátero de lado a. Halle el área de la región circular exterior a la circunferencia inscrita.

4. Los vértices de un triángulo equilátero de lado a son centros de arcos de circunferencias de radio $a/2$. Halle el área de la región circular común a los arcos.

5. Dos circunferencias concéntricas tienen como radio R y $2R$. Halle el radio de un círculo de área igual a la corona circular.

6. Dos tangentes a una circunferencia de radio R se cortan formando un ángulo de 60°. Halle el área de la región circular exterior a la circunferencia.

7. Dos circunferencias congruentes de radio R son secantes y la una pasa por el centro de la otra. Halle el área de la región circular común.

8. Los radios de dos circunferencias tangentes están en la relación 3:1. Se traza una tangente a las dos circunferencias. Halle el área de la región circular exterior a las circunferencias.

9. ABC es un triángulo isósceles rectángulo en A, con centro en A y radio igual a la altura AH. Se traza el arco de circunferencia DE. Halle el área de la región circular exterior al arco e interior al triángulo.

10. AB es el lado de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio R. Halle el área de la región circular exterior al octógono.

En cada una de las siguientes figuras (1 a 15) halle el área sombreada:

11. Circunferencia de centro O con radio R; $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas diametrales perpendiculares. Se traza el arco $A(\overset{\frown}{CD})$.

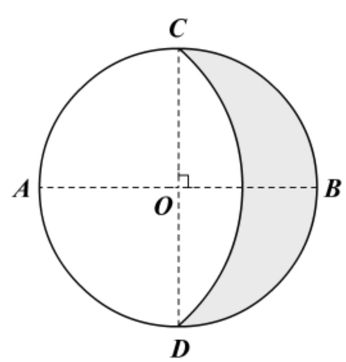


Figura 1

12. En el sector circular $O(\widehat{AB})$ de radio $r = OA$, se inscribe el círculo O_1.

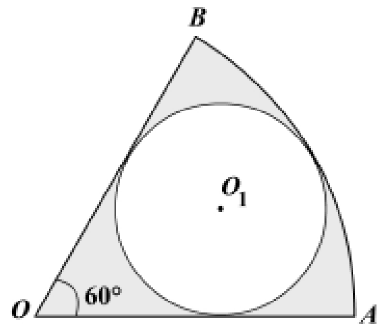


Figura 2

13. En el cuadrado de lado a se inscribe la circunferencia O, y con centro en los puntos medios se trazan los arcos de radio $a/2$.

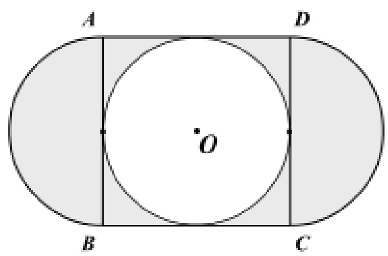


Figura 3

14. AB es el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio R; a su vez AB es el diámetro de la semicircunferencia O.

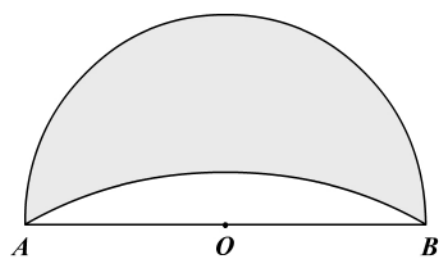


Figura 4

15. A y B son los centros de los arcos que pasan por el centro O de la circunferencia de diámetro AB.

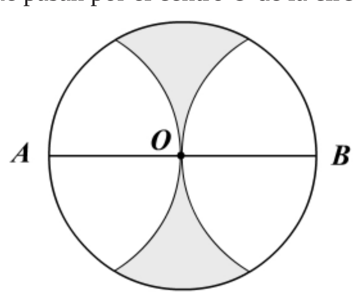


Figura 5

16. O es el centro de la semicircunferencia de radio R. $\overline{AC}$ es tangente y $m\left(A\hat{B}C\right) = 30º$.

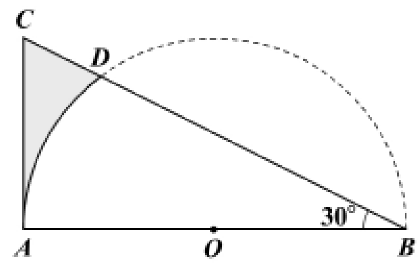


Figura 6

17. *ABCD* es un cuadrado de lado a. Los puntos medios de los lados son los centros de los arcos de diámetro a.

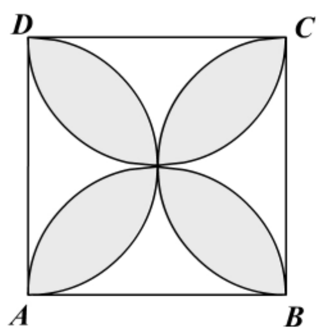


Figura 7

18. *ABCD* es un cuadrado de lado A. Con centros en los vértices se trazan arcos con radios igual a la mitad de la diagonal.

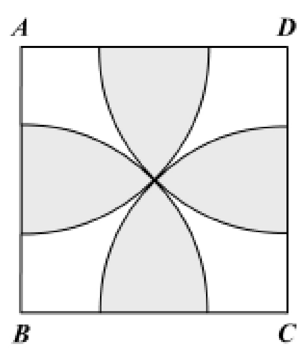


Figura 8

19. $AB = CD = 10$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ en su punto medio; en cada segmento como diámetro se trazan las circunferencias y se forma la roseta.

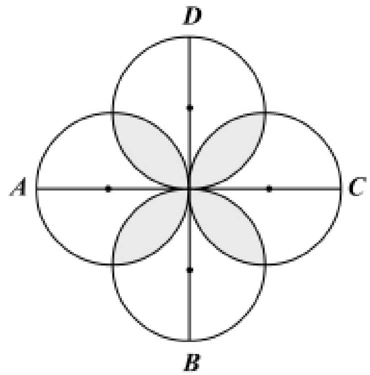


Figura 9

20. R es el radio de la circunferencia O; E es el punto medio del arco BC; $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ son cuerdas diametrales.

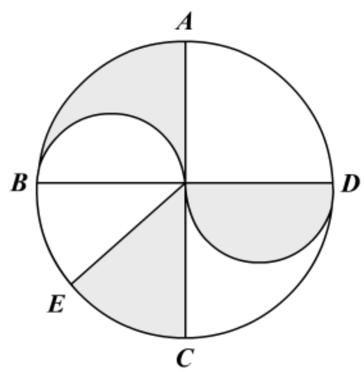


Figura 10

21. $ABCD$ es un cuadrado de lado a, inscrito; A es el centro del arco DB.

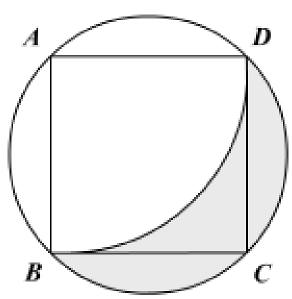


Figura 11

22. *ABCD* es un cuadrado de lado *a*, circunscrito. *M, N, P* y *Q* son puntos medios.

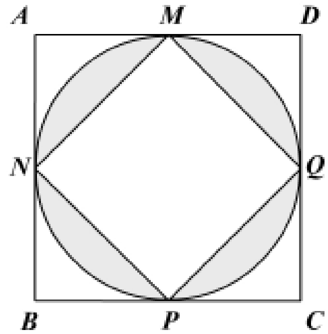


Figura 12

23. *ABCD* es cuadrado circunscrito de lado *a*; *MNPQ* es un cuadrado inscrito en la circunferencia.

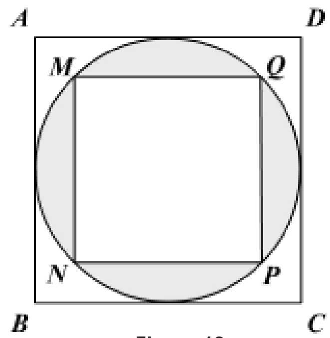


Figura 13

24. La cruz resulta cuando se trazan semicircunferencias sobre cuatro de los lados de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio *R*.

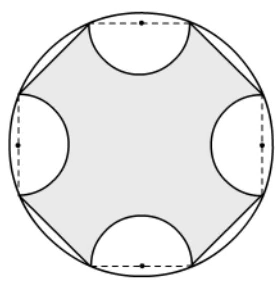


Figura 14

25. $OA = OB = OC = OD = R$..

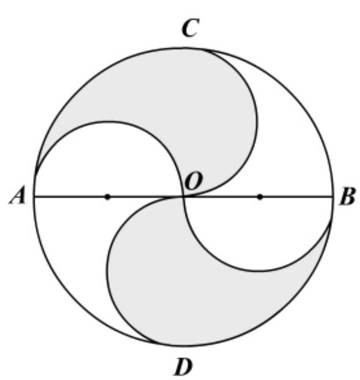


Figura 15

Capítulo 7: Áreas

Auto Evaluación Autoevaluación

Capítulo 7

Áreas

Módulos 24 al 26

1. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o es falsa.

   - Al duplicar el radio de un círculo, se duplica su área.
   - La razón del área de un círculo a la del cuadrado de su radio es π.
   - En un mismo círculo las áreas de dos sectores son proporcionales a los cuadrados de las medidas de sus arcos.
   - El radio de la circunferencia inscrita en un triángulo equilátero es un tercio de la altura.
   - La razón entre el radio de la circunferencia inscrita y la circunscrita a un mismo triángulo equilátero es 2.
   - La mediana de un triángulo divide a éste en dos triángulos de áreas iguales.
   - Dos triángulos con áreas iguales tienen perímetros iguales.
   - Dos triángulos de igual área son congruentes.
   - Dos triángulos de igual área son semejantes.
   - Si se duplica la base de un rectángulo manteniendo la altura constante, se duplica el área.
   - El cuadrado con un perímetro igual al de una circunferencia tiene un área igual a la del círculo correspondiente.
   - Al duplicar la diagonal de un cuadrado se duplica su área.
   - Las áreas de dos triángulos son proporcionales a sus respectivos lados.
   - El área de un cuadrado inscrito en una circunferencia es la mitad de la del cuadrado circunscrito en ella.
   - Si en una circunferencia se triplica su radio, se triplica su longitud.

2. En un cuadrilátero $ABCD$ las diagonales son perpendiculares entre sí. Demuestre que el área $ABCD$ es igual al semiproducto de las diagonales.

3. $ABCD$ es un trapecio con $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ paralelos, $\overline{DH}$ es perpendicular a $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ es la base media. Halle el área del trapecio si:

   a. $AB = 25$ cm, $CD = 15$ cm y $DH = 6$ cm.
   b. $MN = 15$ cm y $DH = 8$ cm.
   c. $AD = 30$ cm, $m(A) = 60°$, $AB = 24$ cm y $CD = 6$ cm.
   d. $DC = 5$ cm, $m(A) = 60°$, $m(B) = 45°$ y $BC = 16$ cm.
   e. $AD = 10$ cm, $m(A) = 30°$ y $AB + CD = 20$ cm.

4. ABC es un triángulo rectángulo en A, $m(\hat{C}) = 30°$, $BC = 2a$ y $\overline{AM}$ es la mediana a la hipotenusa. Por A se traza $\overline{AE}$ paralelo a $\overline{BC}$ y por B se traza $\overline{BE}$ paralelo a $\overline{AC}$. Halle el área $AEBM$.

5. $ABCD$ es un cuadrilátero cuyas diagonales hacen entre sí un ángulo de 60°. Demuestre que el área del cuadrilátero $ABCD = \frac{\sqrt{3}}{4} AC.\, BD$.

6. En un triángulo ABC, $\overline{CE}$ y $\overline{BD}$ son alturas, $m(\widehat{A}) = 60°$, $m(\widehat{B}) = 45°$ y $AE = a$. Halle el área del triángulo.

7. $ABCD$ es un cuadrado de lado a. Se da $A - E - D$ y $A - F - B$ tales que $AF = \frac{2}{3}a$, $AE = \frac{1}{3}a$, y $\overline{CE}$ y $\overline{DF}$ se cortan en H. Demuestre que $\overline{DF}$ es perpendicular a $\overline{EC}$ y halle el área $AEHF$.

8. Las medianas $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ del triángulo ABC son perpendiculares entre sí en O. Si $AC = 8$ cm y $CB = 14$ cm, halle el área $CMON$.

9. En la figura 1 los triángulos ABC y CDE son equiláteros; A, C y D son colineales, $HC = CE = a$ y $A\widehat{C}E \cong A\widehat{C}B$. Halle el área $ABDE$.

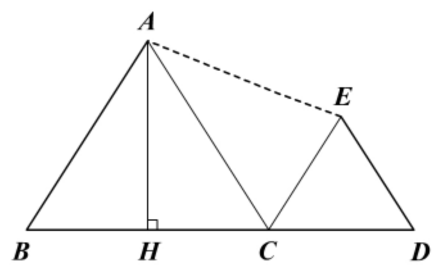


Figura 1

10. En la figura 2, $ABCD$ es un rombo de lado a; M, N, P y Q son los puntos medios de los lados. Halle el área $IJLK$.

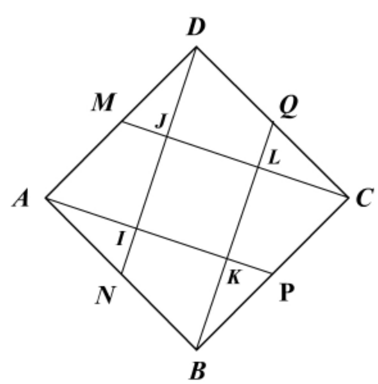


Figura 2

11. En la figura 3, $ABCD$ es un trapecio en el cual $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{DE}$ y $\overline{UC}$ lo es a $\overline{AD}$. Demuestre que las áreas AMF y BFC son iguales.

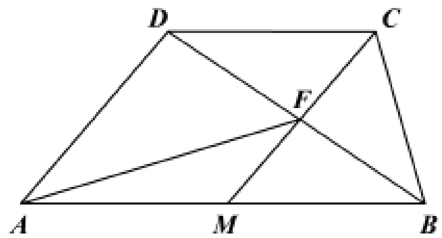


Figura 3

12. En la figura 4, $ABCD$ es un rombo de lado a y los puntos E, F, H e I dividen los lados en la relación 1:2. Halle el área $EFHI$.

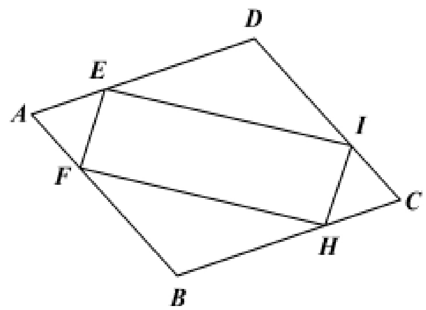


Figura 4

13. En la figura 5 $ABCDEF$ es un hexágono no regular y $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ y $\overline{CD} \parallel \overline{FA}$. Demuestre que $AEC = FBD$.

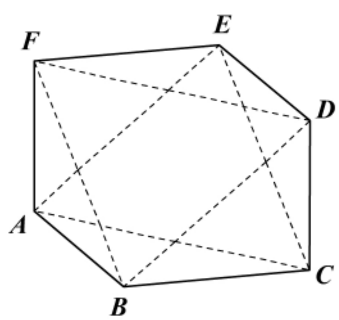


Figura 5

14. En el problema 36 de los ejercicios del módulo 24 demuestre que el área del cuadrado es igual a la suma de las áreas sombreadas.

15. En la figura 6, A es el centro de la semicircunferencia $EBCF$ y D es el centro de la circunferencia BAC. Demuestre que la relación entre las áreas M, N, T y P es $P = T = M + N$.

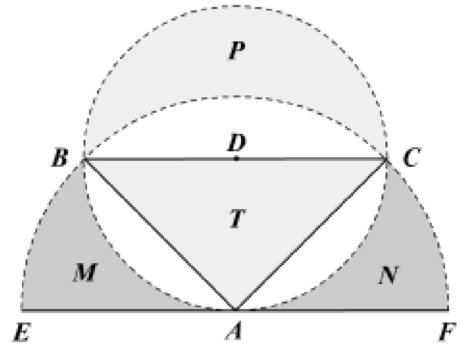


Figura 6

16. En el problema 15 halle en función del radio $R = AF$ el área total: $M + N + T + P$.

17. En la figura 7, $ABCD$ es un cuadrado de lado a. Con centro en los vértices se trazan arcos de circunferencia de radio a que se cortan en los puntos M, N, P y Q.

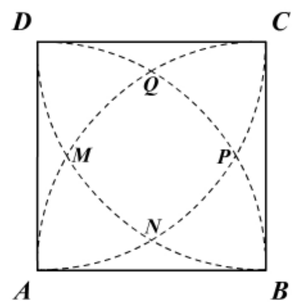


Figura 7

a. Halle el área de la región circular exterior a los arcos.
b. Demuestre que al unir con segmentos los puntos M, N, P y Q resulta un cuadrado cuyo lado es el lado de un dodecágono regular.
c. Halle el área de la región circular $MNPQ$, común a los arcos.

18. En la figura 8, $ABCDE$ es un pentágono regular. Halle el área en función del radio $R = OC$. Halle además el área sombreada.

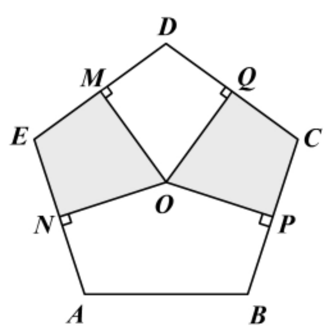


Figura 8

19. En la figura 9, *ABCD* es un hexágono regular. Halle:

a. El área en función del radio $R_1 = ON$.
b. El área en función del radio $R_2 = O$^
c. El área sombreada.

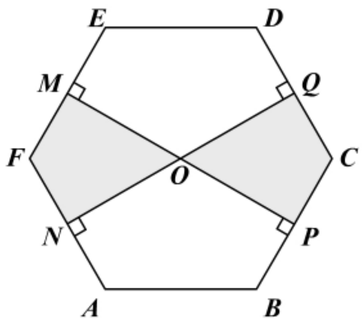


Figura 9

20. Sobre los radios *OA, OB, OC, OD, OE* y *OF* del hexágono regular (figura 10) de lado *a* se toman los puntos *M, N, P, Q, R* y *S* tales que: $OM = \frac{1}{6}OA$; $ON = \frac{2}{6}OB$; $OP = \frac{3}{6}OC$; $OQ = \frac{4}{6}OD$; $OR = \frac{5}{6}OE$; $OS = OF$. Halle, en función del lado *a*, el área total limitada por la línea quebrada *OMNPQRSO*.

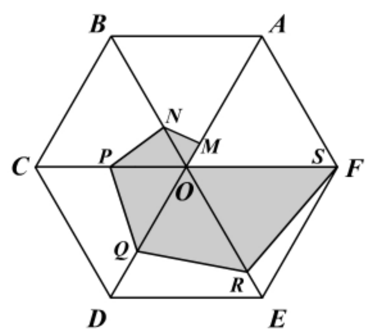


Figura 10

21. Se trazan tres circunferencias de igual radio de tal manera que cada una pasa por el centro de las otras dos. Halle, en función del radio, el área de la región circular común.

22. En la figura 11, *ABCDEF* es un hexágono regular con $M_1, \ldots, M_6$ puntos medios de radio $R = AF/2$. Halle el área sombreada en función del radio *R*.

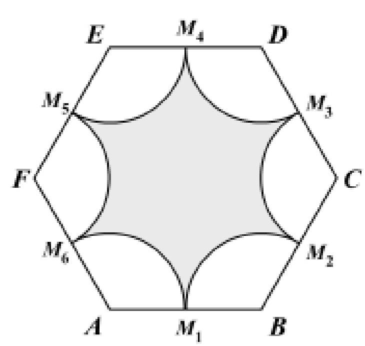


Figura 11

Autoevaluación

23. En la figura 12, ABC es un triángulo equilátero de lado a. $OH = R$ = radio. Halle:

a. El área sombreada en función de a.
b. El área sombreada en función de R.

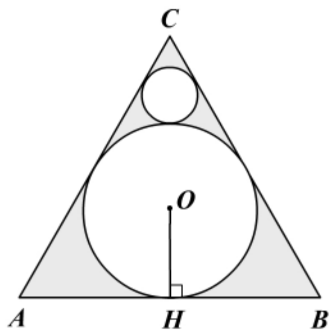


Figura 12

24. En la figura 13, ABC es un triángulo equilátero de lado a. O_1, O_2 y O_3 son centros de arcos y $O_1A = O_1C = O_2B = O_2C = O_3A = O_3B$. Halle el área sombreada en función de a.

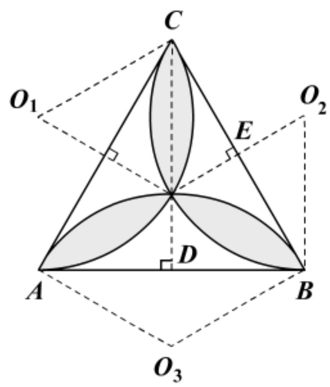


Figura 13

25. En la figura 14, $ABCD$ es un cuadrado de lado a. Además, A, B, C y D centros de los arcos de radio $a/2$. Halle:

a. El área sombreada de los cuatro pétalos.
b. El área sombreada interior común.

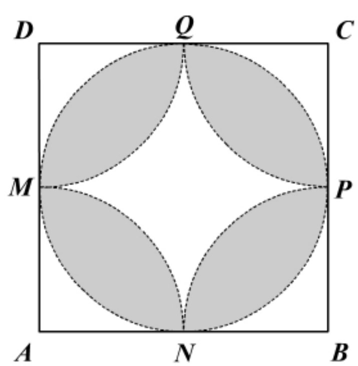


Figura 14

26. En la figura 15, $ABCD$ es un cuadrado de lado a. Además, A, B, C y D son centros de los arcos de radio $a/2$. La circunferencia es tangente a los arcos. Halle el área sombreada en función de a.

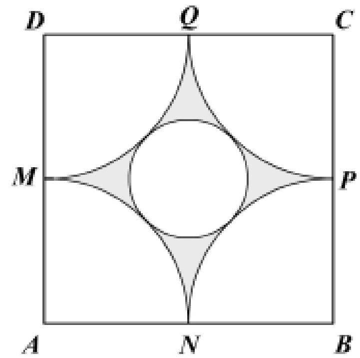


Figura 15

27. En la figura 16, $ABCD$ es un cuadrado de lado a. El radio de los arcos es $a/4$. Halle el área sombreada en función de a.

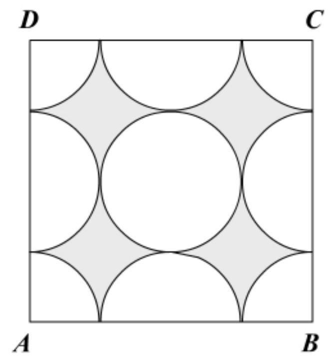


Figura 16

28. En la figura 17 los arcos son congruentes. El radio del círculo es R. Halle:

a. El área de la región circular exterior a los triángulos.
b. El área del hexágono interior.

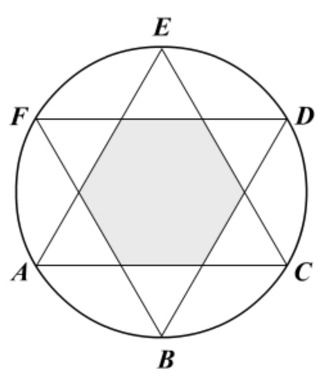


Figura 17

29. En la figura 18, $\widehat{CAB}$ es recto en A. Además, $A\left(\widehat{CB}\right)$ de radio $AB = a$ y M y N son centros de $\widehat{AC}$ y $\widehat{AB}$. Halle el área de la región circular PCB.

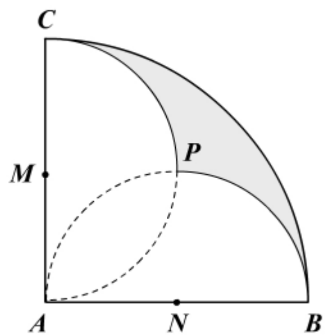


Figura 18

30. En la figura 19, $X\hat{O}Y$ es recto, $M\left(\widehat{AO}\right)$ de radio $2a$ y $O\left(\widehat{MN}\right)$ de radio a. Halle el área de la región circular MPA.

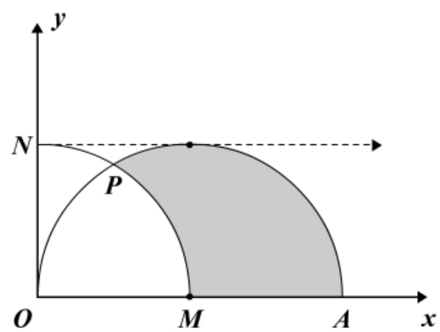


Figura 19

31. En la figura 20 las circunferencias son tangentes entre sí; $O_1O_2 = 2R$. Halle el área del círculo menor (sombreado).

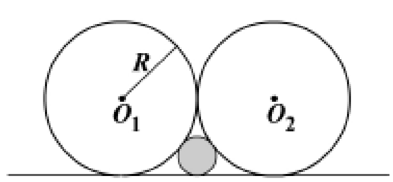


Figura 20

32. En la figura 21, *AEBFCD* es un hexágono regular; por A, B y C se trazan tangentes.

a. Demuestre que el triángulo $A'B'C'$ es equilátero y encuentre su área.
b. Halle el área *AEB* en función de R .
c. Halle el área *OEBF*.
d. Halle el área del triángulo *ABC*.
e. Halle el área de la región circular $B(ADC)$.
f. Demuestre que $AEBFCD = \sqrt{ABC \,.\, A'B'C'}$.

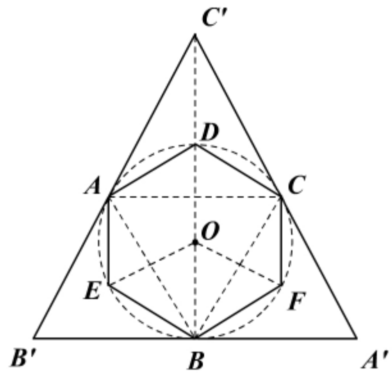


Figura 21

33. En la figura 22 halle el área del ovoide si el radio de la circunferencia O es a. Los arcos AN y BM tienen centros B y A, respectivamente. El arco MN tiene centro en D.

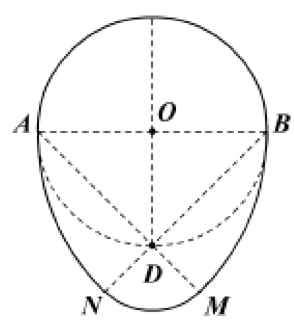


Figura 22

34. En el triángulo *ABC* rectángulo en A, $m\left(\hat{C}\right) = 30°$ y $AB = a$. Sobre cada lado se construyen exteriormente los cuadrados *ABDE*, *ACHF* y *BCIJ*. Halle el área *DEFHIJ*.

35. Usando áreas demuestre los siguientes enunciados:

a. Si ABC es un triángulo isósceles donde $AB = AC$ y P es un punto cualquiera de la base BC (figura 23), la suma de los segmentos perpendiculares a los lados congruentes es constante ($CH = h$).

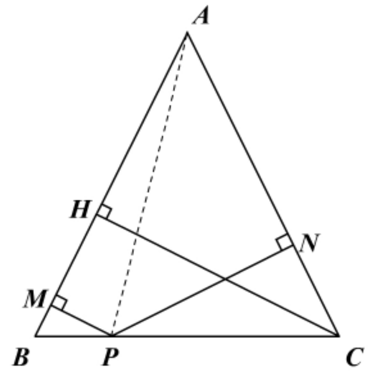


Figura 23

b. Si desde un punto interior O en todo triángulo equilátero se trazan segmentos perpendiculares a los lados, la suma de las medidas de los segmentos es constante (figura 24).

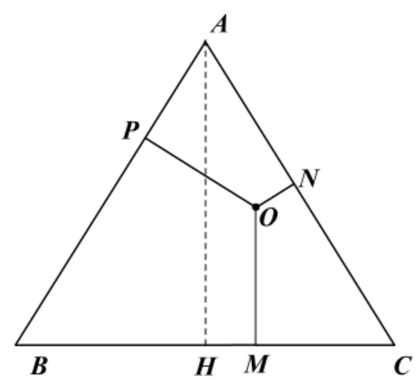


Figura 24

c. Si en todo polígono regular de n lados se trazan perpendiculares a los lados, la suma de la medida de los segmentos es constante (figura 25)

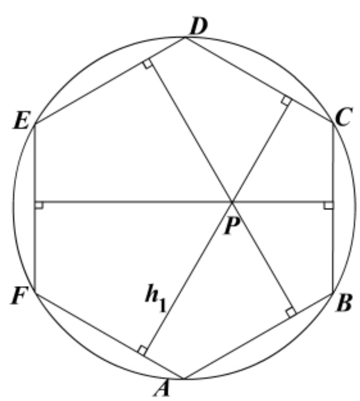


Figura 25

Euclidiana

36. Sobre cada lado de un hexágono regular se construyen exteriormente cuadrados y se unen en forma consecutiva los doce vértices resultantes (figura 26).

a. Halle el área del dodecágono resultante.
b. Halle el área de uno de los triángulos sombreados.

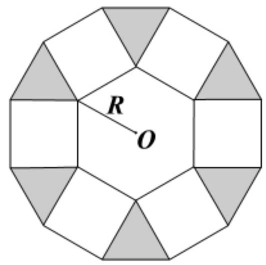


Figura 26

Capítulo 8
Construcciones

Contenido breve

Presentación

Desde los comienzos de la geometría se han usado la regla (no graduada) y el compás como instrumentos en las construcciones geométricas. En este capítulo se presentan las construcciones más elementales y básicas que pueden hacerse con ellos – un segmento, un ángulo, la bisectriz, la perpendicular y la paralela – . Igualmente, se realizan las construcciones básicas de triángulos que corresponden a los criterios de congruencia A-L-A, L-A-L y L-L-L, para luego aplicarlas en la construcción elemental de triángulos dados tres elementos diferentes a los básicos. Al final se hace una ligera presentación de algunos lugares geométricos lineales y circulares sencillos de determinar.

Módulo 27

Construcciones elementales

George David Birkhoff

(1884-1944). Matemático estadounidense nacido en Overisel (Michigan) y muerto en Cambridge (Massachusetts).

Contenidos del módulo

Objetivos del módulo

1. Describir algunos lugares geométricos.
2. Clasificar los lugares geométricos.
3. Construir lugares geométricos.
4. Intersecar lugares geométricos.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es un lugar geométrico?
2. ¿Cómo se clasifican los lugares geométricos?
3. ¿Qué son lugares geométricos lineales?
4. ¿Qué son lugares geométricos circulares?
5. ¿Cómo se intersecan lugares geométricos?

Introducción

Qué es un lugar geométrico y qué condición(es) debe cumplir un punto para pertenecer a él, son dos preguntas que tratan de resolverse al comienzo del módulo. Luego se clasifican los lugares geométricos en lineales y circulares y se analiza además la intersección de algunos de ellos.

Vea el módulo 27 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

27.1 Lugares geométricos

Vimos en el capítulo 2 que una figura geométrica es un conjunto no vacío de puntos que están regidos por una o varias condiciones geométricas respectivas.

Una figura geométrica se suele describir como un ‘‘lugar geométrico’’.

Definición 27.1.1

Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que cumplen una propiedad determinada. Un lugar geométrico puede entonces consistir de uno o más puntos, curvas o superficies o combinaciones de ellas.

Para demostrar que un conjunto de puntos representa un lugar geométrico, es necesario probar:

1. Que el(los) punto(s) cumple(n) la condición geométrica dada.
2. Que los puntos que cumplen la condición geométrica pertenecen al lugar. En forma más simple:

$$X \in \text{lugar} \leftrightarrow X \text{ cumple la propiedad.}$$

Para determinar un lugar geométrico se deben seguir los siguientes pasos:

1. Situar varios puntos que satisfagan la condición dada (pueden ser varias).

2. Determinar qué elementos son invariantes o equivalentes a otros que sean invariantes.

3. Unir los puntos mediante rectas o curvas.

4. Hallar una conclusión del lugar y describirlo con exactitud.

5. Probar la conclusión (demostrar que el conjunto representa el lugar geométrico).

A manera de ejemplo ilustrativo piense en el lugar geométrico del centro de una rueda (puede ser de una bicicleta) cuando se desplaza sobre un piso totalmente plano (figura 27.1).

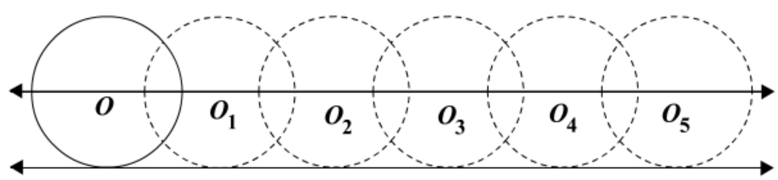


Figura 27.1

¿Qué conclusión puede sacar de la ilustración anterior? $(O, O_1, \ldots\ldots O_5$ son diferentes posiciones del centro de la rueda).

27.2 Clasificación de los lugares geométricos

27.2.1 Lugares geométricos lineales

a. El lugar geométrico de los puntos en un plano situados a una distancia dada en una recta dada son dos rectas paralelas situadas a dicha distancia (figura 27.2). Demuéstrelo.

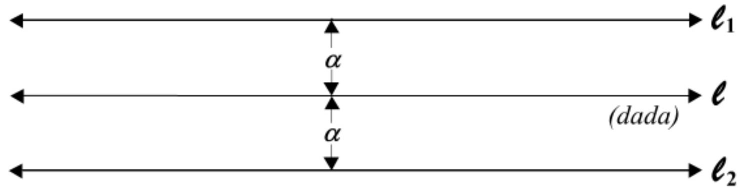


Figura 27.2

b. El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos dados A y B es la mediatriz de $\overline{AB}$ (figura 27.3).

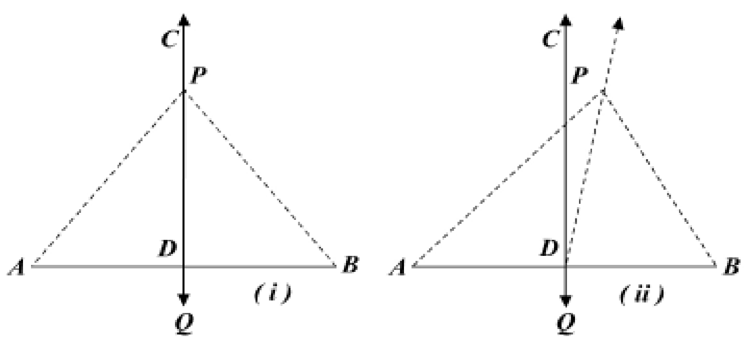


Figura 27.3

Parte i: todo punto sobre la mediatriz del segmento rectilíneo AB es equidistante de los puntos A y B.

Hipótesis: $\overleftrightarrow{CQ} \perp \overline{AB}$; $\overline{AD} \cong \overline{DB}$; $P \in \overleftrightarrow{CQ}$

Tesis: $AP = BP$

Demostración

1. $\overleftrightarrow{CQ} \perp \overline{AB} \wedge \overline{AD} \cong \overline{DB}$	1. Hipótesis.
2. $A\hat{D}P$ y $B\hat{D}P$ rectos	2. De 1, definición de perpendicularidad.
3. Trazamos $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$	3. Construcción.
4. $\overline{PD} \cong \overline{PD}$	4. Reflexividad de congruencia.
5. $\Delta ADP \cong \Delta BDP$	5. C-C, de 1 y 4.
6. $\overline{AP} \cong \overline{BP}$	6. De 5: lados homólogos.

George David Birkhoff

Birkhoff tuvo un especial interés en aplicar el análisis matemático a campos como el arte, la estética, la comunicación y la ética. Birkhoff trató de ver cuáles eran los grados de complejidad y armonía que definen una obra de arte, así como la relación matemática que define esos parámetros. Aunque había trabajado en una teoría matemática de la música, no fue hasta finales de la década de 1920 cuando expuso públicamente sus planteamientos sobre «algunos elementos matemáticos del arte», trabajo previo a su libro *A esthetic measure* (1933).

En 1913 demostró un teorema geométrico objetado por Jules Henri Poincaré, demostración que constituyó un paso adelante para resolver el problema de tres cuerpos cuyos campos de gravitación se interfieren. En 1931 presentó pruebas del *teorema ergódico* relativo a la energía en mecánica estática.

Sus otros trabajos de investigación se refieren a ecuaciones diferenciales, a la dinámica y a la naturaleza e influencia de la relatividad, cuyos resultados quedaron plasmados en las siguientes obras: *Relativity and modern physics*, *Dynamical systems*, *Basic geometry* y *Collected papers*.

Parte ii: cualquier punto equidistante de A y B pertenece a la mediatriz de $\overline{AB}$.

Hipótesis: P es un punto tal que $AP = BP$

$\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}$; $\overline{AD} \cong \overline{BD}$

Tesis: $P \in \overleftrightarrow{CD}$

Nota: la siguiente demostración corresponde a una sola de las bisectrices.

Demostración

1. $P \in \overleftrightarrow{CD} \vee P \notin \overleftrightarrow{CD}$	1. Principio del 3º excluido.
2. Supongamos $P \notin \overleftrightarrow{CD}$	2. Suposición temporal.
3. Trazamos $\overrightarrow{DP}$	3. Construcción.
4. $\overline{AP} \cong \overline{BP} \wedge \overline{AD} \cong \overline{BD}$	4. Hipótesis.
5. $\overline{DP} \cong \overline{DP}$	5. Reflexividad de congruencia.
6. $\Delta ADP \cong \Delta BDP$	6. L-L-L, de 4 y 5.
7. $A\hat{D}P \cong B\hat{D}P$	7. De 6: $\Delta ADP \cong \Delta BDP$.
8. $\overrightarrow{DP} \perp \overline{AB}$	8. De 7, definición de perpendicularidad.
9. $\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}$	9. Hipótesis.
10. Contradicción	10. Por un punto no pueden pasar dos perpendiculares a una recta.
11. $P \in \overleftrightarrow{CD}$	11. De 2 y 10, negación del supuesto.

c. El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas dadas ℓ_1 y ℓ_2 secantes es el conjunto de puntos que pertenecen a las cuatro bisectrices de los ángulos formados por ℓ_1 y ℓ_2 (figura 27.4).

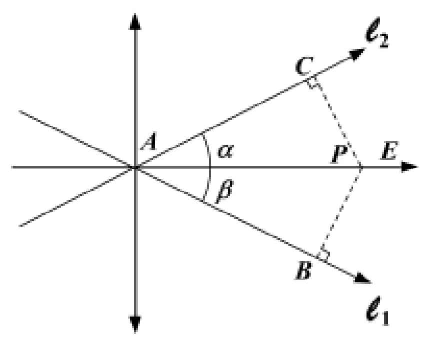


Figura 27.4

Parte i: todo punto $\in$ bisectriz equidista de los lados.

Hipótesis: $\overrightarrow{AE}$ biseca a $C\hat{A}B$; $P \in \overrightarrow{AE}$; $\overline{PC} \perp \overrightarrow{AC}$; $\overline{PB} \perp \overrightarrow{AB}$

Tesis: $PC = PB$

Parte ii: todo punto equidistante pertenece a la bisectriz.

Hipótesis: $\overrightarrow{AE}$ biseca a $C\hat{A}B$; $\overline{PB} \perp \overrightarrow{AB}$; $\overline{PC} \perp \overrightarrow{AC}$; $PC = PB$

Tesis: $P \in \overrightarrow{AE}$

Demostración

i. 1. $\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$	1. $\overrightarrow{AE}$ biseca a $C\hat{A}B$.
2. $A\hat{C}P$ y $A\hat{B}P$ rectos	2. $\overline{PB} \perp \overrightarrow{AB}$ y $\overline{PC} \perp \overrightarrow{AC}$.
3. $\overline{AP} \cong \overline{AP}$	3. Reflexividad de la congruencia.
4. $\Delta ACP \cong \Delta ABP$	4. H-A.
5. $\overline{PC} \cong \overline{PB}$	5. De 4: $\Delta ACP \cong \Delta ABP$.

ii. 1. $A\hat{C}P$ y $A\hat{B}P$ rectos	1. $\overline{PC} \perp \overrightarrow{AC}$ y $\overline{PB} \perp \overrightarrow{AB}$.
2. $\overline{PC} \cong \overline{PB}$	2. Hipótesis $PC = PB$.
3. $\overline{AP} \cong \overline{AP}$	3. Reflexión de la congruencia.
4. $\Delta ACP \cong \Delta ABP$	4. H-C.
5. $C\hat{A}P \cong B\hat{A}P$ $(\hat{\alpha} \cong \hat{\beta})$	5. De 4: $\Delta ACP \cong \Delta ABP$.
6. $\overrightarrow{AP}$ biseca a $C\hat{A}B$	6. De 5: $\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$.

d. El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas paralelas dadas ℓ_1 y ℓ_2 es la paralela media (figura 27.5). Demuéstrelo.

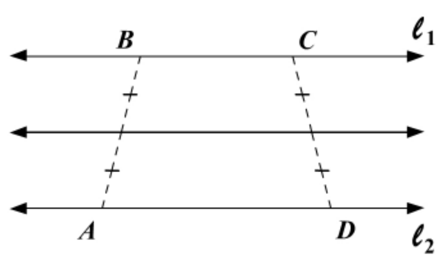


Figura 27.5

Nótese que la paralela media también es el lugar geométrico de los puntos medios de todos los segmentos cuyos extremos están en ℓ_1 y ℓ_2.

e. El lugar de los extremos de un segmento que se apoya en una recta fija formando con ella un ángulo constante es una paralela a la recta.

f. El lugar de los puntos cuya suma de distancias a dos segmentos que se cortan es constante está formado por los lados de un rectángulo (figura 27.6).

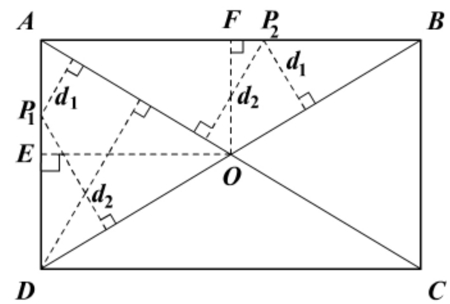


Figura 27.6

$$d_1 + d_2 = OE = K$$
$$d_1 + d_2 = OF = K$$

27.2.2 Lugares geométricos circulares

a. Circunferencia: es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo del plano (figura 27.7).

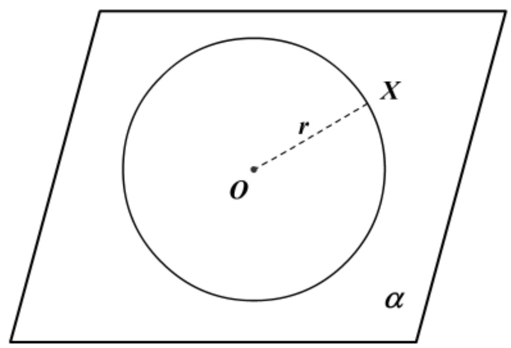


Figura 27.7

$$\left\{X \in \alpha : d(O,X) = m(OX) = r, \text{con } r \in \mathbb{R}^{+} \wedge O \in \alpha\right\}$$

b. Dos circunferencias concéntricas tienen como lugar geométrico la circunferencia de radio semisuma (figura 27.8). Demuéstrelo.

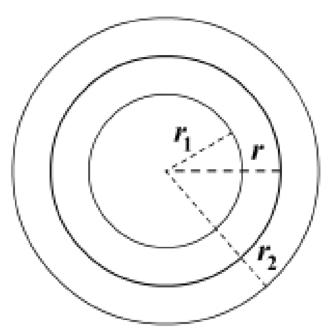


Figura 27.8

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2},\ r_2 > r_1$$

c. El lugar geométrico de los centros de la circunferencia de radio r, tangente (exterior o interior) a una circunferencia de radio ρ, es otra circunferencia concéntrica de radio $r+\rho$ o $\rho - r$ o $r-\rho$. Demuéstrelo. O es fijo pero O' es variable (en la figura 27.9).

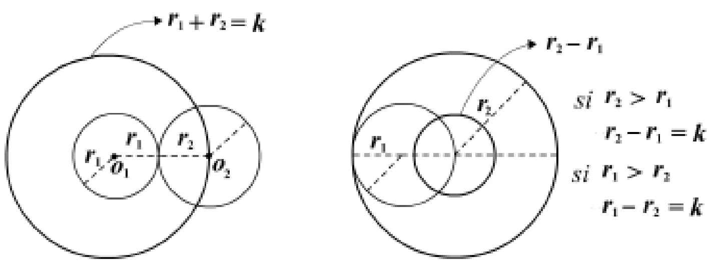


Figura 27.9

d. El lugar de los puntos desde los cuales se ve una circunferencia bajo un mismo ángulo es otra circunferencia concéntrica con aquélla.

e. El lugar de los puntos medios de las secantes a una circunferencia trazadas desde un punto es una circunferencia.

f. El lugar de los centros de las circunferencias que pasan por un punto y bisecan a una circunferencia es una recta.

g. El lugar de los centros de las circunferencias que bisecan a otras dos es una recta.

h. El lugar de los puntos desde los cuales se pueden trazar tangentes iguales a una circunferencia es otra concéntrica a ella.

27.2.3 Lugares geométricos de rectas

El lugar geométrico de las rectas que intersecan bajo un ángulo constante a una recta ℓ dada, está formado por dos ''haces'' paralelos (figura 27.10).

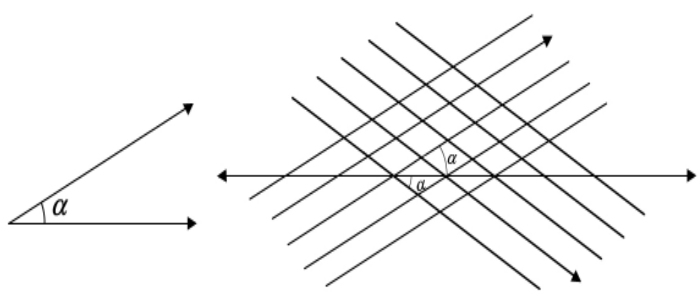


Figura 27.10

27.3 Intersección de lugares geométricos

Para localizar el punto (o el conjunto de puntos) que satisfacen dos o más condiciones, determínese el lugar geométrico para cada condición. El punto o el conjunto de puntos en el cual se intersecan estos lugares geométricos será el punto (o el conjunto de puntos) requerido.

En la resolución de un problema de intersección de lugares geométricos se colocan las partes dadas en posiciones generales y se obtiene la solución más general y luego en una discusión se consideran las posiciones especiales para las partes dadas.

Ejemplo 27.3.1

Halle el conjunto de puntos que equidistan de dos puntos fijos *A* y *B* y están a una distancia *d* de un punto fijo *M* (figura 27.11).

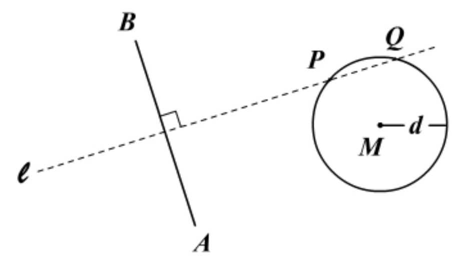


Figura 27.11

Demostración

1. ℓ mediatriz de $\overline{AB}$	1. Equidistan de *A* y *B*.
2. Circunferencia de centro *M* y radio *d*: $C(M,d)$	2. Está a una distancia *d* del punto fijo *M*.
3. $\ell \cap$ (circunferencia) $= \{P, Q\}$	3. Intersección de los lugares.

Discusión
La solución puede ser:

1. Un punto si ℓ es tangente a $C(M,d)$.

2. Vacío, es decir, no hay puntos que satisfagan la condición. Esto ocurre si ℓ es exterior a $C(M,d)$, o sea si la distancia de *M* a ℓ es mayor que *d*.

3. Nunca habrá más de dos puntos en la solución del problema.

Ejemplo 27.3.2

Halle todos los puntos (lugar geométrico) que equidisten de dos puntos fijos y equidisten de dos rectas que se intersecan (figura 27.12).

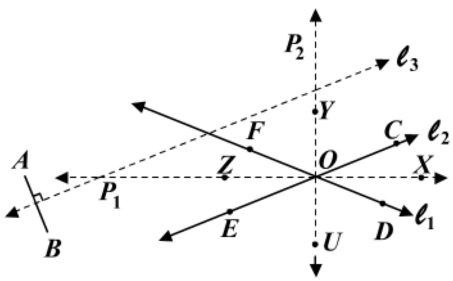


Figura 27.12

Sean A y B dos puntos y $\overleftrightarrow{FD} = \ell_1$ y $\overleftrightarrow{EC} = \ell_2$ dos rectas que se cortan en O.

Demostración

1. ℓ_3 mediatriz de $\overline{AB}$	1. Puntos que equidistan de A y B.
2. $\overleftrightarrow{ZX}$ y $\overleftrightarrow{YU}$ equidistan de ℓ_1 y ℓ_2	2. $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OU}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OZ}$ bisectrices que equidistan de A y B.
3. $\ell_3 \cap \overleftrightarrow{ZX} = \{P_1\}$ y $\ell_3 \cap \overleftrightarrow{YU} = \{P_2\}$	3. Intersección de los lugares.

Discusión

La solución puede ser:

1. Un punto si $\ell_3 \parallel \overleftrightarrow{YU}$ o $\ell_3 \parallel \overleftrightarrow{ZX}$.

2. Infinitos puntos si ℓ_3 coincide con $\overleftrightarrow{ZX}$ o $\overleftrightarrow{YU}$.

3. Si ℓ_3 pasa por O, la solución es un punto $\{O\}$.

4. En cualquier otro caso la solución es dos puntos P_1 y P_2; $\{P_1, P_2\}$.

Ejemplo 27.3.3

Halle todos los puntos equidistantes de dos rectas paralelas ℓ_1 y ℓ_2 y a una distancia dada de una tercera recta ℓ_3 (figura 27.13). Demuéstrelo y haga una discusión de las posibles soluciones.

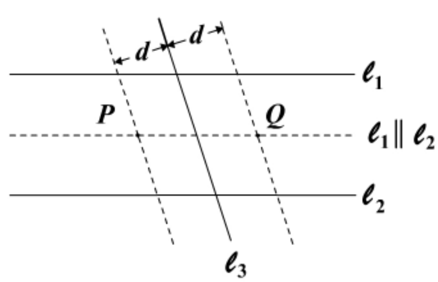


Figura 27.13

Ejercicios

Módulo 27

1. Halle el lugar geométrico de los puntos que equidisten de tres puntos dados *A*, *B* y *C* no colineales.
   R: centro de la circunferencia que pasa por *A, B* y *C*.

2. Halle el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas paralelas a un diámetro de un círculo dado.
   R: cuerda diametral.

3. Halle el lugar geométrico del vértice de un triángulo con una hipotenusa fija como base.
   R: circunferencia de diámetro la hipotenusa.

4. Se da un triángulo *ABC* de base fija *BC* y de altura dada $AH = h$. Encuentre el lugar geométrico del vértice variable *A*.
   R: una paralela a $\overline{BC}$ y a una distancia *h* de $\overline{BC}$.

5. Determine el lugar geométrico del centro del rectángulo si un lado *AB* es fijo.
   R: mediatriz de $\overline{AB}$.

6. Halle todos los puntos en el interior de un ángulo dado equidistante de los lados y a una distancia dada del vértice.

7. Halle todos los puntos equidistantes de:

   a. Los tres vértices de $\overline{AB}$.
   b. Los tres lados del ΔABC.

8. Halle todos los puntos equidistantes de dos rectas que se intersecan y que además están a una distancia dada de un punto dado.

9. Halle todos los puntos a una distancia d_1 de una recta dada a una distancia d_2 de un círculo.

10. Halle el lugar geométrico del cuarto vértice de un paralelogramo de perímetro constante 2*p*, cuyos otros tres vértices están sobre los lados y en el vértice de un ángulo dado.
    R: es la base de un triángulo isóseles cuyos lados iguales mide cada uno el semiperímetro *p* del paralelogramo.

Módulo 28

Construcciones geométricas

Nicomedes

(300-240 a.C.). Matemático griego nacido en Perga.

Contenidos del módulo

28.1 Elementos de la construcción
28.2 Métodos de la construcción
28.3 Operaciones fundamentales con regla y compás
28.4 Usos elementales de la regla y el compás

Objetivos del módulo

1. Definir la regla y el compás.
2. Hacer recomendaciones para el método que se debe usar en las construcciones.
3. Usar la regla y el compás en las construcciones elementales básicas.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es la regla? ¿Qué es el compás?
2. ¿Cuál es el método o procedimiento que se debe seguir en una construcción?
3. ¿Qué operaciones se pueden realizar con la regla y el compás?
4. ¿Cómo construir un segmento? ¿Un ángulo?
5. ¿Cómo trazar paralelas? ¿Cómo trazar perpendiculares?
6. ¿Cómo trazar la bisectriz de un ángulo y la mediatriz de un segmento?

Introducción

Se inicia este módulo presentando dos elementos básicos en las construcciones geométricas, como son la regla y el compás. Se recomienda luego un método general para realizar una construcción métrica y se presentan las operaciones fundamentales con estos dos instrumentos. Se termina haciendo más construcciones básicas como son la construcción de un segmento y de un ángulo, y el trazado de perpendiculares y paralelas, y de la mediatriz y la bisectriz.

Vea el módulo 28 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

28.1 Elementos de la construcción

Conviene repetir aquí los tres primeros postulados de los *Elementos* de Euclides.

i. Puede trazarse una recta de un punto a otro.
ii. Una recta finita puede prolongarse continuamente en línea recta.
iii. Una circunferencia puede describirse tomando cualquier centro y una distancia.

Antes de proceder a considerar problemas de construcción con regla y compás, debemos hacer varias aclaraciones:

a. Cuando hablamos de una regla y un compás, queremos decir una ‘‘regla ideal’’ y un ‘‘compás ideal’’ que traza líneas rectas y circunferencias exactamente.

El espesor de las marcas del lápiz y las aproximaciones involucradas en el dibujo no nos conciernen.

b. La regla euclidiana no tiene graduaciones. Podemos usarla para trazar una línea a través de dos puntos dados y únicamente para eso; no podemos usarla para medir distancias entre puntos, ni aun para decir si dos segmentos son congruentes.

c. El compás euclidiano se puede usar del modo siguiente: dado un punto ‘‘*o*’’ y un punto ‘‘*p*’’ (en el plano), podemos trazar la circunferencia que tiene centro ‘‘*o*’’ y que contiene a ‘‘*p*’’. Esto es para lo *único* que podemos usar el compás euclidiano. Por este motivo, un compás euclidiano se llama a menudo ‘‘compás que se cierra’’ (él solo). Difiere del compás moderno (Birkhoff, George David, 1884-1944) en que éste conserva su abertura y en consecuencia puede utilizarse para dividir y para transportar segmentos; sin embargo, ambos son equivalentes.

28.2 Métodos de la construcción

1. Se supone el problema resuelto, es decir, admitida la existencia de la solución se procura reducir las condiciones impuestas a otras que conllevan a problemas conocidos (por medio de las condiciones necesaria y suficiente).

2. Cuando la sustitución no sea necesaria y suficiente conviene, al menos, utilizar condiciones necesarias para no correr el riesgo de perder soluciones extrañas.

3. Cuando se ha operado con condiciones sólo necesarias se procede a estudiar cómo varía la solución o soluciones del problema al variar los datos.

En forma más simple:

a. Dar el problema por resuelto.
b. Determinar las propiedades de la figura.
c. Utilizando estas propiedades convertirlo en un problema equivalente ya conocido.

28.3 Operaciones fundamentales con regla y compás

a. Trazar una recta que une dos puntos (regla).
b. Hallar el punto de intersección de dos rectas (regla).
c. Trazar una circunferencia de centro O y radio dado (compás).
d. Efectuar una intersección de una recta y una circunferencia (regla y compás).
e. Efectuar una intersección de dos circunferencias (compás).

Notación

1. En el capítulo 5, la circunferencia de centro O y radio r, lo mismo que el círculo, se denotaron con $C(O,r)$ y $\overline{C}(O,r)$, respectivamente.

2. Para simplificar y para comodidad en las construcciones, la circunferencia de centro O y que pasa por un punto P la denotamos O (P).

3. Si el radio de la circunferencia es la medida de $AB = b$, se denotará con $A(AB)$ o $A(b)$; nótese que $A(AB) = A(B) = A(b)$.

Convención

En la construcción de un problema aparecen tres clases de trazos, que para mejor identificación los diferenciamos así (figura 28.1):

Figura 28.1

a. Datos: trazado continuo (fijo).
b. Auxiliares: trazos discontinuos delgados.
c. Resultados: trazos continuos gruesos.

28.4 Usos elementales de la regla y el compás

Construcción 1

El compás usado como transportador de segmentos (figura 28.2).

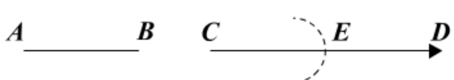


Figura 28.2

Con centro en C trazamos $C(AB) \wedge AB = CE.$

Construcción 2

En un punto sobre una recta construir un ángulo congruente a un ángulo dado (compás) (figura 28.3).

Nicomedes

Nicomedes es conocido por el descubrimiento de la *concoide* que lleva su nombre (curva obtenida por la prolongación o disminución del radio vector de cada punto de una recta dada en un segmento constante); aplicó dicha curva a la solución de los problemas de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, e inventó un método mecánico para trazarla. Estudió la cuadratriz de Hippias y su aplicación al cálculo de la cuadratura del círculo. Una de sus más importantes obras es *Introducción a la aritmética*.

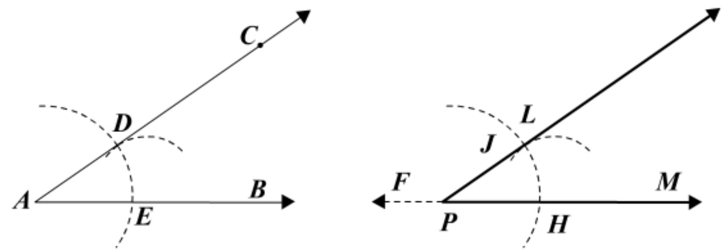


Figura 28.3

1. Con A como centro y cualquier radio trazamos un arco que corte a $\overrightarrow{AB}$ en E y a $\overrightarrow{AC}$ en D.

2. Con P como centro y radio AD, construimos $\overset{\frown}{LH}$ que interseca a $\overleftrightarrow{FM}$ en H, o sea: $A(AE) = A(AD) = P(PH) = P(PL)$.

3. Con centro en H y radio ED construimos un arco que corta a $\overset{\frown}{LH}$ en J, o sea: $E(ED) = H(HL)$.

4. Trazamos $\overrightarrow{PL}$.

5. $H\hat{P}J \cong B\hat{A}C$. Demuéstrelo. (Sugerencia: trace $\overline{DE}$ y $\overline{LH}$.)

Construcción 3
Trazar la mediatriz de un segmento (compás y regla) (figura 28.4).

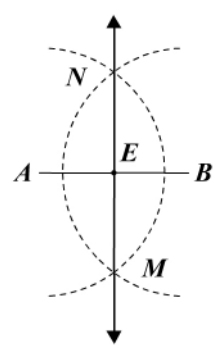


Figura 28.4

1. Con A y B como centros y con radio $AM > \dfrac{AB}{2}$ trazamos $A(AM) = B(BM)$ que se cortan en M y N.
2. Trazamos $\overline{MN}$ que corta a $\overline{AB}$ en E.
3. $\overleftrightarrow{MN}$ es mediatriz. Demuéstrelo. (Sugerencia: trace $\overline{AN}$, $\overline{BN}$, $\overline{BM}$, $\overline{MA}$.)

Construcción 4
Trazar la perpendicular por un punto P a una recta ℓ (compás y regla) (figura 28.5).

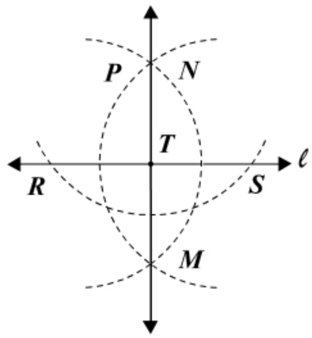


Figura 28.5

1. Trazamos $P(PS) = P(PR)$ con radio mayor que PT.

2. Trazamos $S(SN) = S(SM) = R(RN) = R(RM) > \frac{1}{2}RS$.

3. Trazamos $\overline{PM}$.

4. $\overleftrightarrow{PM} \perp \ell$. Demuéstrelo.
   Se deja como ejercicio construir la perpendicular levantada por un punto *P* que pertenezca a una recta.

Construcción 5
Trazar la bisectriz de un ángulo (compás y regla) (figura 28.6).

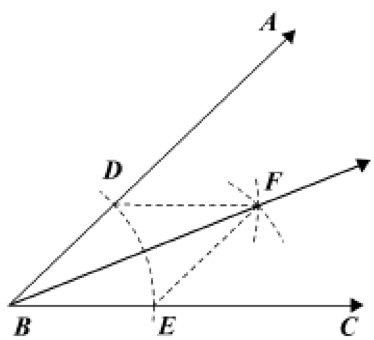


Figura 28.6

1. Trazamos $B(BE) = B(BD)$ cualquiera.

2. Trazamos $D(DF) = E(EF) > \frac{1}{2}DE$.

3. Trazamos $\overrightarrow{BF}$.

4. $\overrightarrow{BF}$ bisectriz de $A\hat{B}C$.

Demuestre que $\overrightarrow{BF}$ es la bisectriz y es única.

Construcción 6
Trazar una paralela por un punto *P* exterior a una recta dada ℓ (compás y regla) (figura 28.7).

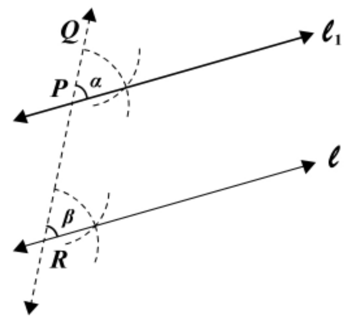


Figura 28.7

1. Por P trazamos $\overleftrightarrow{QR}$ tal que $\overleftrightarrow{QR} \cap \ell = \{T\} \wedge Q - P - R.$

2. Con P como vértice y $\overrightarrow{PQ}$ como lado, construimos $\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}.$

3. $\ell_1 \parallel \ell$. Demuéstrelo.

Nota: en la construcción anterior se ha usado el concepto de ángulos correspondientes. También se puede usar el de ángulos alternos internos para la misma construcción. Esta se ilustra en la figura 28.8 y se pide describir el proceso y dar la demostración correspondiente.

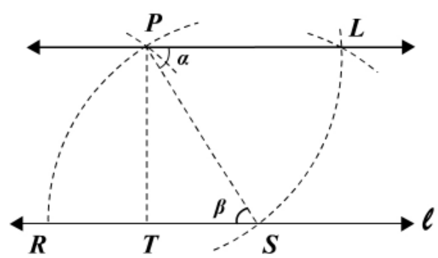


Figura 28.8

Construcción 7

Dividir un segmento en un número dado de segmentos congruentes (para el caso $n = 4$) (figura 28.9).

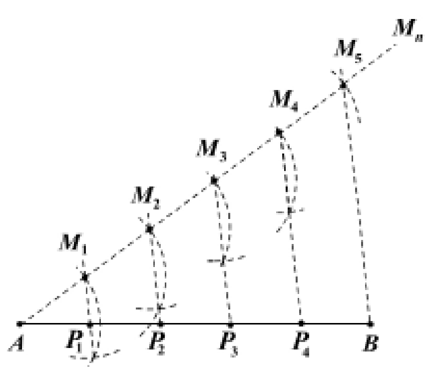


Figura 28.9

1. Construimos $\overrightarrow{AM}$ cualquiera.

2. Dividimos $\overrightarrow{AM}$ en segmentos congruentes AM, $M_1M_2,...,$ $M_{n-1}M_n$

3. Construimos $\overline{M_nB}$.

4. Por $M_1, M_2,..., M_{n-1}$ construimos paralelas a $\overline{M_nB}$ que cortan a $\overline{AB}$ en $P_1, P_2..., P_{n-1}$.

5. Los puntos $P_1,..., P_{n-1}$ dividen a $\overline{AB}$ en segmentos congruentes. Demuéstrelo.

Módulo 29

Construcción de triángulos

Contenidos del módulo

29.1 Construcciones básicas de triángulos

Objetivos del módulo

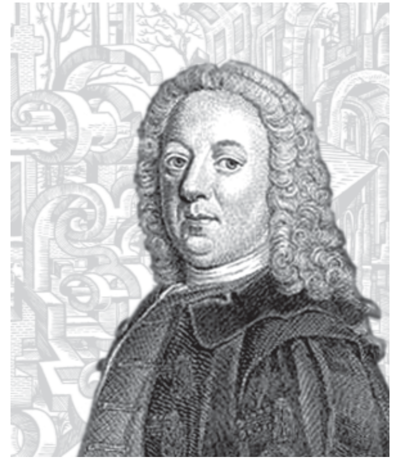
1. Construir los triángulos que cumplen con los criterios de congruencia de triángulos.
2. Analizar el caso ambiguo (L-L-A).

Preguntas básicas

1. ¿Cómo construir un triángulo conociendo:
   a. Dos lados y el ángulo comprendido?
   b. Dos ángulos y el lado comprendido?
   c. Las medidas de los tres lados?
2. ¿Cómo construir un triángulo conocidos dos lados y el ángulo opuesto?

Introducción

En este módulo se estudia la construcción de triángulos, dados los elementos básicos que posteriormente se aplicarán en la construcción de triángulos en una forma más general.



Robert Simson

(1687-1768). Matemático escocés nacido en Kirktonhall y muerto en Glasgow.

Vea el módulo 29 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

29.1 Construcciones básicas de triángulos

Consideremos cuatro casos de construcciones básicas de triángulos:

a. Dados los lados a y b y el ángulo $\hat{C}$ (L-A-L), $(m(\hat{C})<180^\circ)$.

b. Dados un lado y dos ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ (A-L-A), $(m(\hat{B})+m(\hat{C})<180^\circ)$.

c. Dados tres lados (L-L-L), $(a<b+c)$.

d. Dados dos lados a y b, el ángulo $\hat{A}$ (L-L-A).

Solución al caso a: L -A- L (figura 29.1)

Recuerde: 1. $C(M)$: circunferencia de centro C que pasa por M.
2. $C(CM)$: circunferencia de centro C y radio = CM.

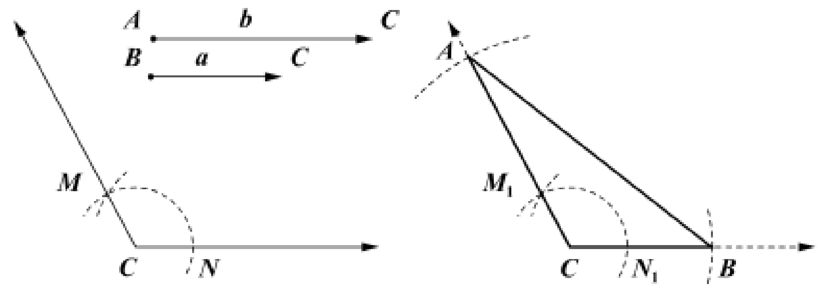


Figura 29.1

Demostración

1. $C(N)=C(M)=C(N_1)=C(M_1)$	1. Construcción del ángulo.
2. $C(a)=C(B)$; $C(b)=C(A)$	2. Construcción de los lados $\overline{CB}$ y $\overline{CA}$, respectivamente.
3. Trazamos $\overline{AB}$	3. Construcción.
4. ΔACB único	4. L-A-L: $m(\hat{C})<180^\circ$.

Solución al caso b: A-L-A (figura 29.2)

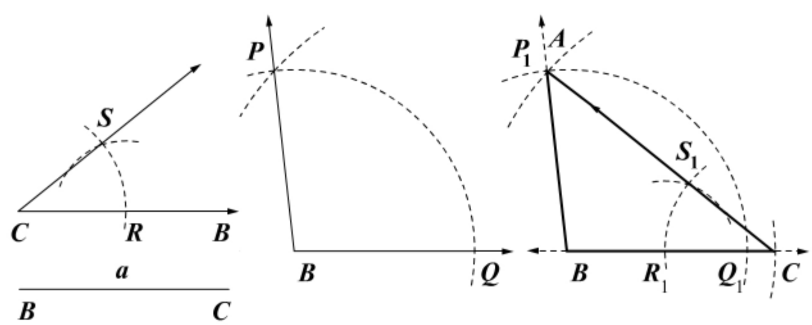


Figura 29.2

Demostración

1. $B(Q)=B(Q_1)=B(P_1)=B(P)$	1. Construcción del ángulo.
$Q(P) = Q_1(P_1)$	$P\hat{B}Q \cong P_1\hat{B}Q_1$.
2. $B(a) = B(C)$	2. Construcción del lado $\overline{BC}$.
3. $C(R)=C(S)=C(R_1)=C(S_1)$	3. Construcción del ángulo.
$R(S) = R_1(S_1)$	$S_1\hat{C}R_1 = S\hat{C}R$.
4. Trazamos $\overline{CS_1}$ hasta cortar a $\overline{BP_1}$ en A	4. Construcción.
5. ΔABC único	5. A-L-A: $m(\hat{B})+ m(\hat{C})<180º$

Solución al caso c: L-L-L (figura 29.3)

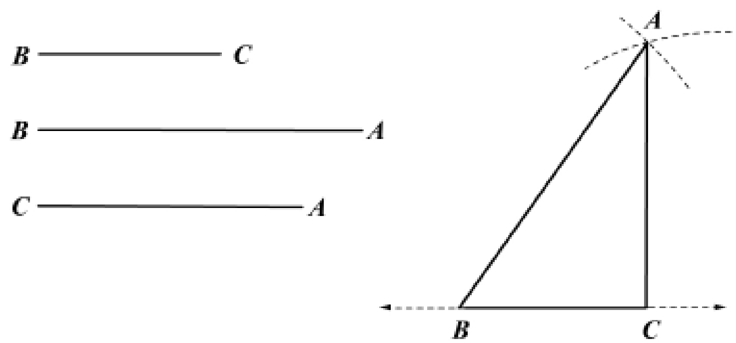


Figura 29.3

Demostración

1. $B(a) = B(C)$	1. Construcción del lado *BC*.
2. $B(b) = B(A)$	2. Construcción del lado *BA*.
3. $C(c) = C(A)$	3. Construcción del lado *CA*.
4. $B(A) \cap C(A) = \{A\}$	4. Intersección de lugares.
5. ΔABC único	5. L-L-L: $a< b+c$.

Solución al caso d: L-L-A (figura 29.4)

Sea «*d*» la distancia de «*C*» al lado opuesto. $d < b$ y pueden ocurrir los siguientes cuatro casos:

i) $a < d$: no hay solución.

ii) $a = d < b$: solución única o $a > b > d$, $\hat{A}$ obtuso.

iii) $d < a < b$: una o dos soluciones si $\hat{A}$ es agudo; y ninguna solución si $\hat{A}$ es obtuso.

iv) $a = b$: con $\hat{A}$ agudo, el triángulo es isósceles.

Robert Simson

Simson estudió los textos de los matemáticos griegos y publicó diversas obras basadas en ellas: tradujo los *Elementos de geometría,* de Euclides, y escribió sobre las cónicas siguiendo el estilo del matemático griego Apolonio de Perga. En su nombre se define la «recta de Simson» como aquella recta que está definida por los pies de las perpendiculares bajadas a los lados de un triángulo, desde un punto cualquiera de un arco de la circunferencia circunscrita (el llamado teorema de Wallace-Simson afirma que el lugar geométrico de todos los puntos *P* para los cuales los tres puntos antes citados están alineados es precisamente la circunferencia circunscrita del triángulo original).

Veremos a continuación la solución de cada uno de estos casos:

i) $a < d$ (figura 29.4).

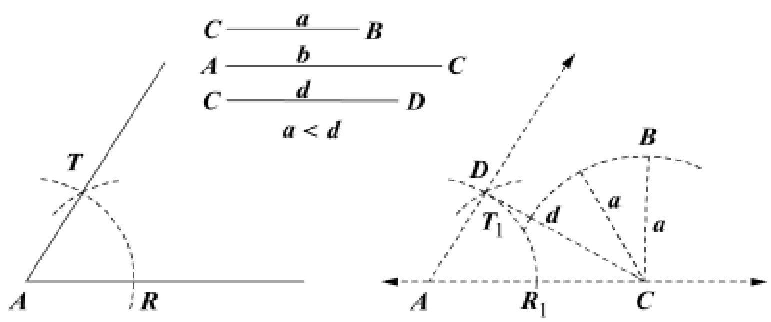


Figura 29.4

Demostración

1. $A(R) = A(T) = A(R_1) = A(T_1)$ $R(T) = R_1(T_1)$	1. Construcción del ángulo $T\hat{A}R \cong T_1\hat{A}R_1$.
2. $A(b) = A(C)$	2. Construcción del lado $\overline{AC}$.
3. $C(a) = C(B)$	3. Construcción del lado $\overline{CB}$.
4. $\overline{CD} \perp \overrightarrow{AB}$	4. Construcción.
5. $a < d$	5. Hipótesis.
6. $C(B) \cap \overrightarrow{AB} = \varnothing$	6. No existe triángulo.

ii) $a = d < b$ (figura 29.5)

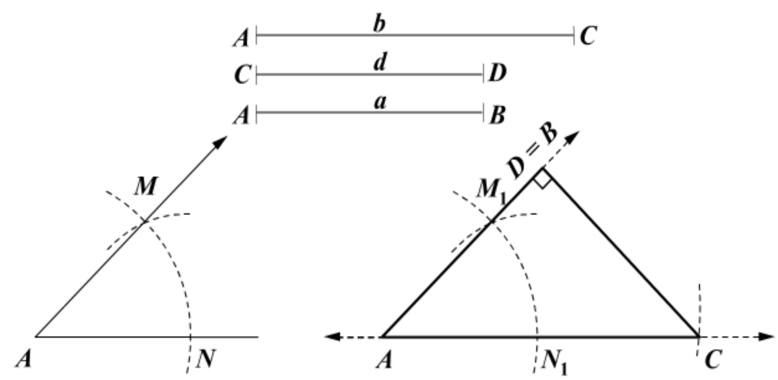


Figura 29.5

Demostración

1. $A(N) = A(M) = A(N_1) = A(M_1)$ $N(M) = N_1(M_1)$	1. Construcción del ángulo. $M\hat{A}N \cong M_1\hat{A}N_1$.

2. $A(b) = A(C)$ — 2. Construcción del lado $\overline{AC}$.

3. $C(D) = C(B)$ — 3. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$.

4. ΔABC único — 4. H-C.

iii) $d < a < b$; $\hat{A}$ agudo (figura 29.6)

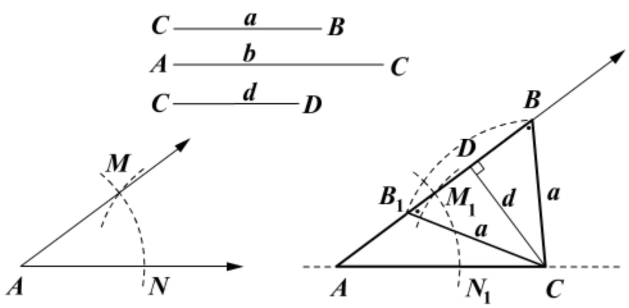


Figura 29.6

Demostración

1. $A(N) = A(M) = A(N_1) = A(M_1)$ — 1. Construcción del ángulo.

$N(M) = N_1(M_1)$ — $M\hat{A}N \cong M_1\hat{A}N_1$.

2. $A(b) = A(C)$ — 2. Construcción del lado $\overline{AC}$.

3. $C(a) \cap \overrightarrow{AM_1} = \{B, B_1\}$ — 3. $d < a$.

4. ΔABC y ΔAB_1C solución — 4. De afirmación 3.

5. $A\hat{B}_1C$ complemento de $\hat{B}$ — 5. ΔCB_1B isósceles.

iv) $a = b$; $\hat{A}$ ´agudo (figura 29.7).

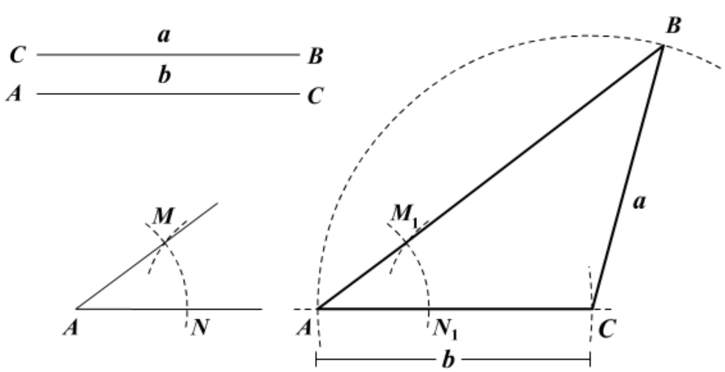


Figura 29.7

Demostración

1. $A(N) = A(M) = A(N_1) = A(M_1)$ $N(M) = N_1(M_1)$	1. Contrucción del ángulo. $M\hat{A}N \cong M_1\hat{A}N_1$.
2. $A(b) = A(C)$	2. Construcción del lado $\overline{AC}$.
3. $C(a) = C(b)$	3. $a = b$.
4. ΔABC isósceles	4. $AC = CB = a = b$.

Nota: analizar el caso de $a > b$ y $d < a$.

Ejercicios

Módulo 29

1. Construya un triángulo rectángulo dados:

   a. C-C: los dos catetos (aplique L-A-L).
   b. C-A: un cateto y un ángulo (aplique A-L-A).
   c. H-A: la hipotenusa y un ángulo (aplique L-A-A).
   d. H-C: la hipotenusa y un cateto (aplique A-L-L).

2. Construya un triángulo isósceles dados:

   a. Un lado y un ángulo (aplique L-A-L o A-L-L).
   b. La base y un lado (aplique L-L-L).
   c. La base y un ángulo de la base (aplique A-L-A).

3. Circunscriba una circunferencia a un triángulo dado (trace las mediatrices y su punto de corte será el centro del círculo circunscrito, por ello se llama *circuncentro*).

4. Inscriba una circunferencia en un triángulo dado (trace las bisectrices y el punto de corte será el centro de la circunferencia pedida, por ello se llama *incentro*).

5. Construya un triángulo congruente a un triángulo dado (aplique L-L-L).

6. Construya un triángulo equilátero dados:

   a. Un lado (L-L-L).
   b. La altura (A-L-A, A-A-L).
   c. El radio del círculo inscrito (H-C).
   d. El perímetro (A-L-A) (figura 1).

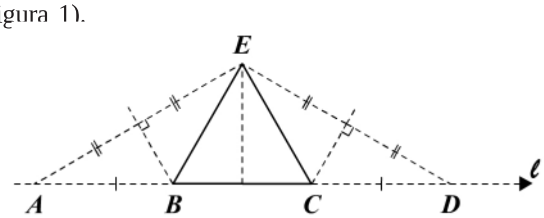


Figura 1

Sugerencia: AD = perímetro.
Construya ΔADE (A-L-A), donde el ángulo A mide 30 y ℓ es AD o sea el perímetro. Determine los vértices B y C.

7. Construya un triángulo conocidos el perímetro y dos ángulos.

8. Construya un triángulo dados dos ángulos y la suma de dos de sus lados (figura 2).

Sugerencia: construya ΔCBX dados: $AX = AB + BC$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$.

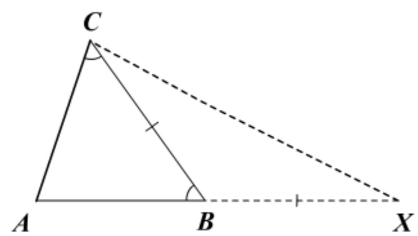


Figura 2

9. Construya un triángulo isósceles dados el perímetro y la perpendicular trazada a la base del vértice opuesto (figura 3).

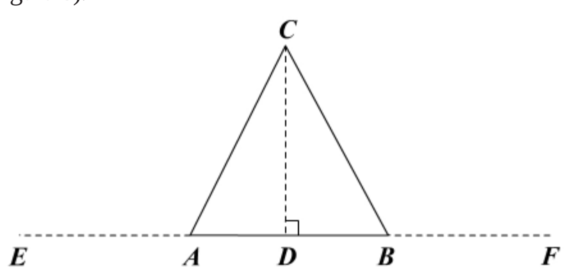


Figura 3

Hipótesis: $EF = AB + AC + CB$

$CD = h;\ \overline{CD} \perp \overline{EF}$

Tesis: construir ΔABC isósceles

10. Construya un triángulo rectángulo conociendo un cateto y una de las medianas (tres soluciones).

11. Construya un triángulo isósceles conociendo la altura desde el vértice y la mediana a un lado congruente.

12. Construya un triángulo rectángulo isósceles conociendo:

a. La hipotenusa.
b. La altura.

13. Contruya un triángulo rectángulo conociendo:

a. La altura y la mediana que parten del ángulo recto.
b. La altura y la bisectriz que parten del ángulo recto.

14. Construya un triángulo rectángulo conociendo la altura relativa a la hipotenusa y sabiendo que la bisectriz del ángulo recto es:

a. Congruente con el cateto menor.
b. Congruente con el cateto mayor.

15. Construya un rectángulo dados un lado y el ángulo de las diagonales (figura 4).

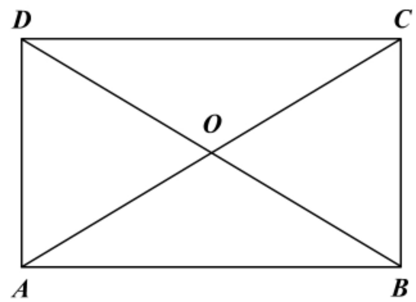


Figura 4

Hipótesis: $\overline{AB}$ y $A\hat{O}D$

Tesis: construir $ABCD$ rectángulo

Módulo 30

Construcciones generales

Apolonio de Perga

(¿262-180? a.C.). Matemático griego nacido en Perga, Panfilia (hoy Turquía).

Contenidos del módulo

30.1 Construcción de triángulos dados tres elementos

Objetivos del módulo

1. Construir triángulos dados tres de sus elementos.
2. Construir algunos cuadriláteros.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo construir algunos triángulos dados tres elementos?

Introducción

En esta sección final se estudia la construcción de algunos triángulos dados tres de sus elementos. En estas construcciones se aplican los principios básicos vistos en el módulo anterior.

Vea el módulo 30 del programa de televisión *Geometría Euclidiana*

30.1 Construcción de triángulos dados tres elementos

Tomemos algunas convenciones para la nomenclatura de elementos de triángulos:

1. Los ángulos de un triángulo los denotamos con los vértices correspondientes.

2. La medida de los lados con letras minúsculas correspondientes al vértice opuesto (figura 30.1*a*).

3. h_a, h_b, h_c son las alturas correspondientes a los lados *a, b, c* (figura 30.1*a*).

4. m_a, m_b, m_c son las medianas correspondientes a los lados *a, b, c* (figura 30.1*b*).

5. b_a, b_b, b_c son las bisectrices correspondientes a los lados *a, b, c* (figura 30.1*c*).

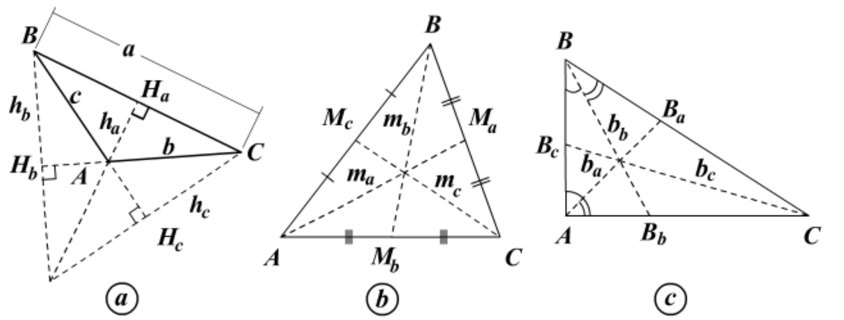


Figura 30.1

Nota:

a. Los pies de las alturas, medianas y bisectrices son respectivamente: $H_a, H_b, H_c, M_a, M_b, M_c, B_a, B_b, B_c$.

b. Tomando el sentido contrario a las manecillas del reloj podemos dar una notación para los elementos de un cuadrilátero así como lo hemos hecho con los elementos del triángulo (figura 30.2).

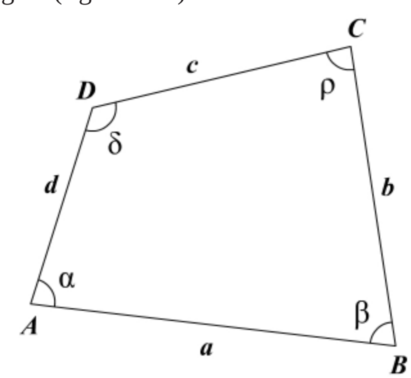


Figura 30.2

Considerando los elementos de un triángulo (3 lados, 3 ángulos, 3 bisectrices, 3 medianas, 3 alturas; 3 pies de: alturas, medianas, bisectrices; centros de circunferencia inscrita y circunscrita; perímetro, suma y diferencia de lados), vemos que en total son 28 elementos y que tomados de 3 en 3 resultan teóricamente 3.276 construcciones posibles.

Para realizar estas construcciones nos basamos en las construciones elementales de la *sección anterior, y aparecerán sombreadas.*

Construcción 1

Dados: altura correspondiente al lado "a" (h_a) y los lados "*a*" y "*c*" o sea: h_a, a, c, con $c > h_a$ (figura 30.3).

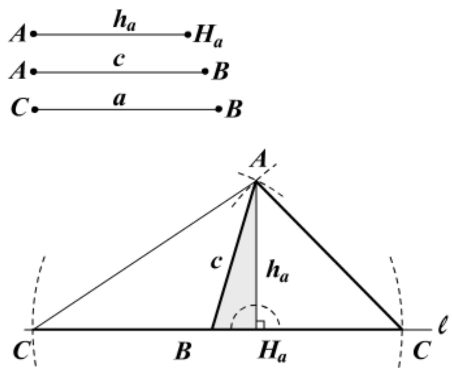


Figura 30.3

Demostración

1. Sobre la recta ℓ tomamos H_a	1. Construcción.
2. Levantamos por H_a una perpendicular a ℓ	2. Construcción.
3. $H_a(h) = H_a(A)$	3. Construcción $\overline{AH_a}$.
4. $A(c) = A(B)$	4. Construcción de $\overline{AB}$.
5. $B(C') = B(C) = B(a)$	5. Construcción de $BC = a$.
6. $\Delta ABC'$ y ΔABC solución	6. Cumplen la condición.

Nota: obsérvese que los cuatro primeros pasos corresponden a la construcción del triángulo rectángulo ABH_a dados H-C (el cateto es h_a).

Construcción 2

Dados: altura correspondiente al lado "*a*" y los lados "*b*" y "*c*"; o sea h_a, b, c, con $b > h_a$ y $c > h_a$ (figura 30.4).

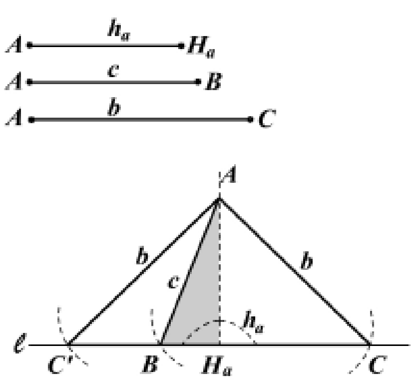


Figura 30.4

Apolonio de Perga

Fue llamado el «Gran Geómetra». Sus extensos trabajos sobre geometría tratan de las secciones cónicas y de las curvas planas y la cuadratura de sus áreas. Escribió sobre cálculos aritméticos y estadística y puso los cimientos de la geometría de posición con su *Tratado de las cónicas*, que en un principio estaba compuesto por ocho libros.

Demostración

1. ΔABH rectángulo único	1. H-C $(c > h_a)$.
2. $A(C') = A(C)$	2. $AC = b$.
3. ΔABC y $\Delta ABC'$ soluciones	3. Cumplen las condiciones.

Construcción 3

Dados: mediana correspondiente al lado "*a*" y los lados "*a*" y "*c*", o sea M_a, a, c (figura 30.5).

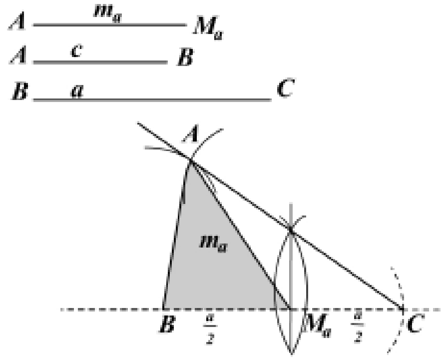


Figura 30.5

Demostración

1. Determinamos M_a	1. M_a punto medio de $\overline{BC}$.
2. ΔABM_a único	2. L-L-L $(\overline{AM_a}, \overline{AB}$ y $\overline{BM_a})$.
3. $M_a\ (m_a) \cap B\ (c) = \{A\}$	3. $BA = c$, $M_aA = m_a$.
4. ΔABC único	4. Al unir *A* con *C*.

Construcción 4

Dados: la mediana correspondiente al lado "*a*", el lado "*c*" y el ángulo correspondiente al vértice *B*, o sea m_a, *c*, *B* (figura 30.6).

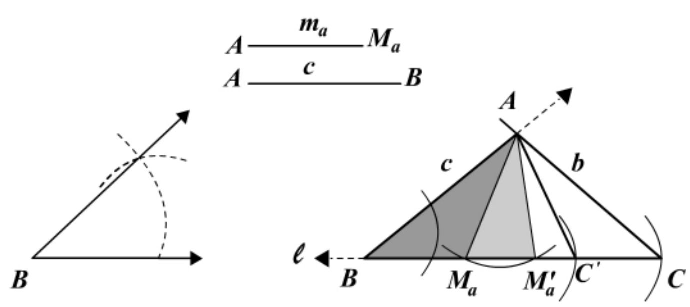


Figura 30.6

Demostración

1. Construimos el $\hat{B}$	1. Construcción.
2. $B(c) = B(A)$	2. Construcción de $AB = c$.
3. $A(m_a) = A(M'_a) = A(M_a)$	3. Construcción de m_a.
4. $M'(B) = M'_a(C')$; $M_a(B) = M_a(C)$	4. M'_a y M_a pies de medianas.
5. ΔABM_a puede o no existir	5. A-L-L (1, 2 o ninguna solución).
6. ΔABC y $\Delta ABC'$ soluciones	6. En el caso de que A-L-L tenga dos soluciones.

Construcción 5

Dados: la bisectriz correspondiente al lado ''*a*'', lado ''*c*'' y el ángulo correspondiente al vértice *A*, o sea $b_a, c, \hat{A}$ (figura 30.7).

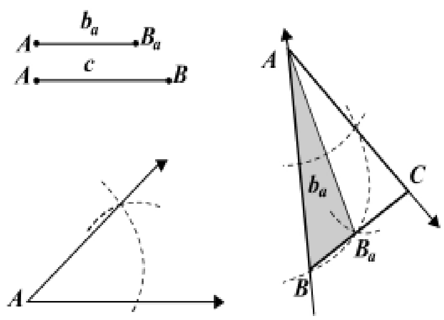


Figura 30.7

Demostración

1. Construimos $\hat{A}$	1. Construcción.
2. Construimos $\overline{AB_a}$	2. b_a bisectriz.
3. $AB = c$	3. Construimos lado $\overline{AB}$.
4. ΔABB_a único	4. L-A-L.
5. ΔABC solución única	5. ΔAB_aC único.

Construcción 6

Dados: la bisectriz correspondiente al lado *"a"*, lado *"c"* y el ángulo *B*, o sea $b_a, c, \hat{B}$ (figura 30.8).

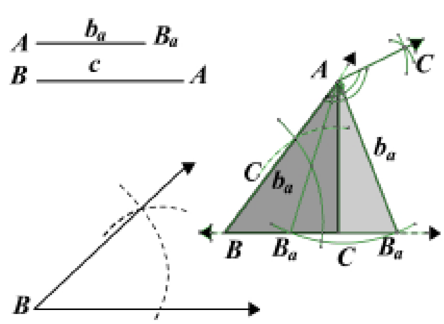


Figura 30.8

Demostración

1. Construimos el ángulo $\hat{B}$	1. Construcción.
2. $B(c) = B(A)$; $AB = c$	2. Construcción del lado $\overline{BA}$.
3. $A(b_a) = A(B_a)$	3. Construcción de la bisectriz.
4. Trazamos $\overline{BB_a}$	4. Construcción.
5. Construimos $B_a\hat{A}C$ y $B'_a\hat{A}C'$	5. $\overrightarrow{AB_a}$ y $\overrightarrow{AB_a}$ bisectriz.
6. ΔBAB_a puede no existir	6. A-L-L.
7. ΔABC existe (solución)	7. $\overline{AC} \cap \overline{BB_a} = \{C\}$.
8. $\Delta ABC'$ no existe	8. $\overline{AC'} \cap \overline{BB'_a} = \varnothing$.

Nota: cuando se van a construir cuadriláteros especiales, la descomposición de ellos en triángulos mediante una o las dos diagonales permite reducir su construcción a la de éstos.

Auto Evaluación Autoevaluación

Capítulo 8
Construcciones

Módulos 27 al 30

Complete cada una de las siguientes proposiciones:

1. Un punto situado a igual distancia de los extremos de un segmento, está sobre ______________ del segmento.

2. La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento _________________ trazado del punto a la recta.

3. El lugar geométrico de los puntos que se encuentran a una distancia dada de un punto fijo es ____________________

4. El máximo número de puntos que están a una distancia dada de dos rectas incidentes es ______________________

5. Las mediatrices de los catetos de un triángulo se intersecan en ____

6. El máximo número de puntos por los cuales es posible hacer pasar una circunferencia es ____________________

7. Para inscribir un círculo en un triángulo es necesartio construir dos de las ___________________del triángulo.

8. El lugar geométrico del vértice de un triángulo con hipotenusa fija es ____________________________________

En cada una de las siguientes afirmaciones (9 a 17) determine la alternativa correcta:

9. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas es:

   a. Una recta
   b. Un círculo
   c. Dos rectas paralelas
   d. Dos rectas que se intersecan perpendicularmente
   e. Dos rectas que se intersecan

10. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos y a una distancia dada de una recta es, en general:

    a. Una recta
    b. Una circunferencia
    c. Dos puntos
    d. Dos rectas que se intersecan
    e. El vacío

11. El lugar geométrico de un punto a una distancia dada de un punto fijo y equidistante de dos rectas paralelas es, en general:

a. Un punto
b. Dos puntos
c. Una circunferencia
d. Dos puntos
e. El vacío

12. El lugar geométrico de un punto equidistante de dos puntos A y B y de otros dos C y D es, en general:

a. Dos puntos
b. Dos rectas que se intersecan
c. Cuatro puntos
d. Un punto
e. El vacío

13. El lugar geométrico de un punto equidistante de dos rectas que se intersecan y a una distancia dada de una recta fija es, en general:

a. Cuatro puntos
b. Dos puntos
c. Un punto
d. Una recta
e. Dos rectas no paralelas

14. El lugar geométrico de un punto equidistante de los tres lados de un triángulo es:

a. Tres puntos
b. Tres rectas que se cortan en un punto
c. Tres rectas paralelas
d. Un punto
e. El vacío

15. El lugar geométrico de un punto equidistante de dos rectas que se intersecan y a una distancia dada de un punto fijo es, en general:

a. Tres rectas
b. Tres puntos
c. Un punto
d. Cuatro puntos
e. El vacío

16. El lugar geométrico de un punto a una distancia dada de un círculo y a una distancia dada de una recta es, en general:

a. Un punto
b. Dos puntos
c. Tres puntos
d. Cuatro puntos
e. El vacío

17. El lugar geométrico de un punto equidistante de dos circunferencias concéntricas y de dos puntos fijos es, en general:

a. Un punto
b. Dos puntos
c. Cuatro puntos
d. Seis puntos
e. El vacío

18. Halle el lugar geométrico del vértice A de un triángulo ABC de base fija $\overline{BC}$ y tal que la mediana $\overline{AM}$ relativa a $\overline{BC}$ sea siempre congruente con $\overline{AC}$.

R: mediatriz de $\overline{MC}$.

19. Se dan dos rectas cualesquiera $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ y un punto M variable sobre $\overleftrightarrow{AC}$. Del punto M se traza $\overrightarrow{ML} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Se prolonga $\overrightarrow{ML}$ una longitud $LE = ML$. Determine el lugar geométrico del punto E.

R: $\overleftrightarrow{AE}$ formando con $\overleftrightarrow{AB}$ un ángulo LAM o $BAC \wedge L\hat{A}M \cong L\hat{A}E$.

20. En la figura 1:

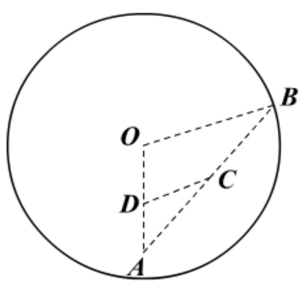


Figura 1

Hipótesis: "O" centro de $O(OB)$
$A \in$ interior de $O(OB)$. (A fijo)
$OD = DA$; $AC = CB$
Tesis: lugar geométrico de "C"

R: circunferencia de centro D y radio $OB/2 : D(OB/2)$.

21. En la figura 2:

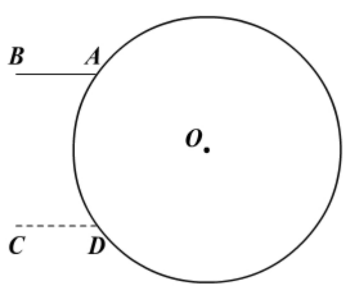


Figura 2

Hipótesis: "O" fijo tal que $O(A)$; $O \neq A$
$\overline{AB}$ se mueve paralelo a sí mismo
Tesis: lugar geométrico de "B"

R: circunferencia igual a $O(A)$.

Sugerencia: sea $CD = AB$ y $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$.

22. Un segmento se mueve de tal manera que constantemente se apoya en dos rectas perpendiculares entre sí. Halle el lugar geométrico de su punto medio (figura 3).

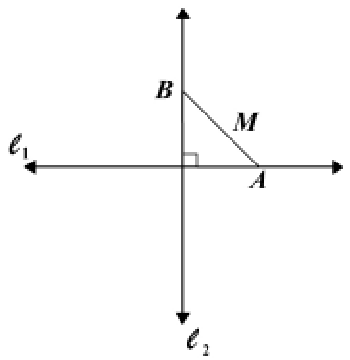


Figura 3

Hipótesis: $\ell_1 \perp \ell$

$\overline{AB}$ de longitud dada

M punto medio de $\overline{AB}$

$A \in \ell$ y $B \in \ell_1$

Tesis: lugar geométrico de M

23. Divida un segmento en partes directamente proporcionales a otros segmentos dados.

24. Halle el cuarto proporcional de tres segmentos.

25. Por dos puntos dados trace una circunferencia de radio dado.

26. Construya un triángulo ABC dados $\overline{AB}$ lado, $\hat{A}$, $AC - BC = AX$.

27. Construya un triángulo cualquiera conociendo el lado $BC = 6$, el ángulo $m(\hat{B}) = 45^{\circ}$ y la suma $AB + AC = 10$ de los otros dos lados.

28. Construya un triángulo conociendo el lado $BC = 6$, la medida $m(\hat{B}) = 45^{\circ}$ y la diferencia $AB - AC = 3$ de los otros dos lados.

29. Construya un triángulo equilátero de perímetro 18.

30. Construya un triángulo ABC conociendo el perímetro 15 y $m(\hat{A}) = 60^{\circ}$ y $m(\hat{B}) = 45^{\circ}$.

31. Construya un triángulo ABC rectángulo en A, sabiendo que la suma de las longitudes de los catetos es 8 y $m(\hat{B}) = 30^{\circ}$.

32. Construya un triángulo isósceles ABC con $AB = AC$, la altura AH y la mediana BM.

33. Construya un triángulo ABC conociendo la base BC, la altura AH, la mediana BM. Sugerencia: prolongue $\overline{BM}$ tal que $BM = MB'$.

34. Construya un rectángulo conociendo su perímetro 12 y su diagonal $d = 5$ (figura 4).

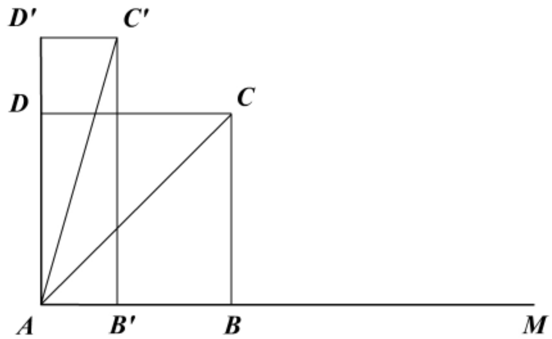


Figura 4

Sean $AM = 12$, y $AC = AC' = 5$. Construya con dimensiones reales: *ABCD* y *AB'C'D'*

35. Construya un cuadrado conociendo *AE,* la suma de dos lados y su diagonal $AC = B$.

36. Construya un trapecio conociendo sus bases $DC = b_2$, $AB = b_1$ y sus diagonales $AC = d_1$, $BD = d_2$. Sugerencia: sea $AE = AB + BE = b_1 + b_2$.

37. Construya un cuadrilátero *ABCD* sabiendo que $AD = 4$, $DC = 6$, $CB = 5$, $AB = 3$ y $m(\hat{A}) = 45º$.

38. Construya un cuadrilátero conociendo una diagonal y los cuatro lados. Analice las condiciones de posibilidades.

39. Construya un triángulo rectángulo conociendo:

a. Un cateto y la suma o diferencia de los otros dos.
b. La hipotenusa y la suma o diferencia de los catetos.
c. m_a, h_a rectángulo en *A*.

40. Construya un triángulo conociendo:

a. c, h_c, m_c.
b. a, h_c, m_c.
c. α, β, b_c.
d. c, m_a, m_b.
e. c, m_a, m_c.
f. m_a, m_b, m_c.
g. a, b, m_c.
h. h_c, m_a, m_b.
i. Los puntos medios de los lados.
j. Los pies de las tres alturas

41. Construya un paralelogramo conociendo:

a. Sus lados y uno de los ángulos que ellos forman.
b. Sus lados y una de las diagonales.
c. Sus diagonales y uno de los ángulos que ellas forman.
d. Sus diagonales y uno de sus lados.

42. Construya un rectángulo conociendo:

a. Un lado y la diagonal.
b. Sus diagonales y uno de los ángulos que ellas forman.

43. Construya un rombo conociendo:

a. El lado y una de sus diagonales.
b. Sus diagonales.

44. Construya un trapecio isósceles conociendo:

a. Sus bases y su altura.
b. Uno de sus ángulos, su altura y su diagonal.
c. Su altura, su lado no paralelo y su diagonal.

45. Construya un trapecio conociendo los siguientes datos, según la figura 5:

a. h, b, e, f.
b. $h, e, \alpha = \beta$.
c. a, c, b, β.
d. a, c, e, f.

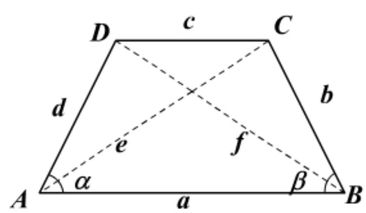


Figura 5

Apéndice

Alfabeto griego

	Mayúsculas	Minúsculas	Nombres	Equivalencias en sonidos españoles
1	Α	α	alfa	a
2	Β	β	beta	b
3	Γ	γ	gamma	g
4	Δ	δ	delta	d
5	Ε	ε	épsilon	e (corta)
6	Ζ	ς	zeta	z
7	Η	η	eta	e (larga)
8	Θ	θ	theta	t
9	Ι	ι	iota	i
10	Κ	κ	kappa	k
11	Λ	λ	lambda	l
12	Μ	μ	my (mu)	m
13	Ν	ν	ny (nu)	n
14	Ξ	ξ	xi	x
15	Ο	ο	ómicron	o (corta)
16	Π	π	pi	p
17	Ρ	ρ	rho	r
18	Σ	σ, ς	sigma	s
19	Τ	τ	tau	t
20	ϒ	υ	ípsilon	y
21	Φ	ϕ	phi (fi)	f
22	Χ	χ	ji	c, q
23	Ψ	ψ	psi	ps
24	Ω	ω	omega	o (larga)

Bibliografía

1. Bruño GM. 1963. *Geometría: curso superior*. 13.ª ed. Medellín: Editorial Bedout.
2. Cometer HSM. 1961. *Introduction to geometry*. New York: Wiley and Sons.
3. FGM. 1907. *Éléments de géométrie*. Librairie Générale.
4. Guarín H. 1990. *Introducción al simbolismo lógico*. Editorial Zuluaga: Medellín.
5. Hemmerling EM. *Geometría elemental*. México: Limusa-Wiley.
6. Jurgensen R, Donnelly AJ, Dolciani MP. 1963. *Modern geometry, structure and method*. Editorial Adviser: Boston.
7. Malher G. 1940. *Geometría del plano*. Barcelona: Labor.
8. Moise EE. 1968. *Elementos de geometría superior*. México: Editorial Continental.
9. Moise EE, Downs FL. 1986. *Geometría moderna* (traducción de Mariano García). Massachussets: Addison-Wesley.
10. Puig Adam P. 1958. *Curso de geometría métrica: fundamentos*. Madrid: Biblioteca Matemática.
11. Rey Pastor J. 1959. *Elementos de geometría racional*. Madrid: Nuevas Gráficas.
12. Rich B. 1995. *Geometría*. 2.ª ed. New York: Schaum's.
13. Suppes P, Hill S. 1963. *Introducción a la lógica matemática*. Medellín: Editorial Reverté Colombiana.
14. Une reunion de professeurs. 1956. *Cours de géométrie: classe de mathématique*. Paris: Ligel.